

ENGINEER



international scientific journal

SPECIAL ISSUE

E-ISSN

3030-3893

ISSN

3060-5172



SLIB.UZ
Scientific library of Uzbekistan



A bridge between science and innovation



**TOSHKENT DAVLAT
TRANSPORT UNIVERSITETI**

Tashkent state
transport university



ENGINEER

A bridge between science and innovation

E-ISSN: 3030-3893

ISSN: 3060-5172

SPECIAL ISSUE

24-april, 2025



engineer.tstu.uz

**MUHAMMADAMIN KABULOVICH TOHIROVNING TAVALLUDINING
80 YILLIGIGA BAG'ISHLANGAN
“SAMARALI QURILISH MATERIALLARI, KONSTRUKSIYALARI VA
TEXNOLOGIYALARI”
MAVZUSIDAGI XALQARO ILMIY-AMALIY KONFERENSIYASI
ILMIY ISHLARI TO'PLAMI**

Toshkent davlat transport universiteti Rossiya Arxitektura va qurilish fanlari akademiyasining akademigi, O'zbekiston Respublikasida xizmat ko'rsatgan yoshlar murabbiysi, texnika fanlari doktori, professor **Muhammadamin Kabulovich Tohirovning tavalludining 80 yilligiga bag'ishlangan “Samarali qurilish materiallari, konstruksiyalari va texnologiyalari”** mavzusidagi xalqaro ilmiy-amaliy konferensiya ilmiy ishlari to'plami chop etildi.

Muhammadamin Kabulovich kompozitsion qurilish materiallarining polistrukturaviy nazariyasini rivojlantirishga ulkan hissa qo'shgan olimdir. 1995-yilda Muhammadamin Kabulovich Rossiya Arxitektura va qurilish fanlari akademiyasining (RAASN) xorijiy a'zosi etib saylangan, bu esa ularning qurilish materialshunosligi sohasiga qo'shgan ilmiy hissasining xalqaro miqyosdagi e'tirofi bo'ldi. Ular o'z ilmiy faoliyati davomida 6 ta monografiya, 200 dan ortiq ilmiy maqola va 25 ta ixtiroga mualliflik guvohnomasi yaratganlar.

Ushbu konferensiyaning asosiy maqsadi – qurilish materialshunosligi, bino va inshootlarni loyihalash hamda qurilish sohasidagi zamonaviy ilmiy tadqiqotlar natijalarini muhokama qilish, shuningdek, muhandislik ta'limini takomillashtirish yo'llarini aniqlashdir.

Konferensiyada O'zbekiston Respublikasi hamda xorijiy mamlakatlarning oliy o'quv yurtlari va ilmiy-tadqiqot institutlari olimlari, shuningdek, muhim ilmiy tadqiqot natijalariga ega bo'lgan ishlab chiqarish vakillari o'z ilmiy ishlari bilan ishtirok etdilar.

“Samarali qurilish materiallari, konstruksiyalari va texnologiyalari” mavzusidagi xalqaro ilmiy-amaliy konferensiyaning asosiy yo'nalishlari quyidagilardan iborat:

1. **Resurs va quvvatni tejaydigan qurilish materiallari va texnologiyalari** – zamonaviy ekologik va iqtisodiy talablarni qondirishga qaratilgan innovatsion yechimlar.
2. **Bino va inshootlarning qurilish konstruksiyalari, zamonaviy hisoblash va loyihalash usullari - muhandislik** va texnologik yechimlarni takomillashtirish yo'nalishlari.
3. **Arxitektura va shaharsozlik** – estetik va funksional jihatlarni uyg'unlashtirgan zamonaviy loyihalar yaratish.
4. **Zamonaviy muhandislik ta'limi tizimini takomillashtirish** – kelajak mutaxassislarini yuqori malakali darajada tayyorlash uchun ta'lim jarayonini modernizatsiya qilish.

Mazkur konferensiya ilmiy hamjamiyatning turli vakillarini bir joyga jamlab, qurilish materialshunosligi sohasidagi zamonaviy muammolar va istiqbollarni muhokama qilish uchun qulay platforma vazifasini bajardi.

Elastic-plastic bending of three-layer rods under single and variable loading, taking into account damage and temperature effects

A. Abdusattarov¹, E.I. Starovoitov²

¹Tashkent state transport university, Tashkent, Uzbekistan

²Belarusian state university of transport, Gomel, Belarus

Abstract: The article provides a scheme for calculating the deformation of three-layer elastoplastic rods with a rigid filler that are asymmetrical in thickness under single and variable loading, taking into account damage and temperature effects. Based on the Lagrange variational principle, the problem of bending three-layer rods under single and alternating loading is formulated. An approximate method based on the method of elastic solutions is used to solve the problems. The calculated values for three-layer rods are given, taking into account the cyclic characteristics of the materials, the accumulation of damage and the influence of temperature.

Keywords: three-layer rod, variable loading, temperature exposure, damage, variational principle, equations of equilibrium, displacement, angle of rotation

Упругопластический изгиб трёхслойных стержней при однократном и переменном нагружении с учетом повреждаемости и температурного воздействия

Абдусаттаров А.¹, Старовойтов Э.И.²

¹Ташкентский государственный транспортный университет, Ташкент, Узбекистан

²Белорусский государственный университет транспорта, Гомель, Беларусь

Аннотация: В статье приводится схема расчета деформирования несимметричных по толщине упругопластических трёхслойных стержней с жестким заполнителем при однократном и переменном нагружении с учетом повреждаемости и температурного воздействия. На основе вариационного принципа Лагранжа сформулирована постановка задачи изгиба трёхслойных стержней при однократном и знакопеременном нагружении. Для решения задач применяется приближенный метод, базирующийся на методе упругих решений. Приведены расчетные величины для трёхслойных стержней с учетом циклических характеристик материалов, накопления повреждений и влияния температуры.

Ключевые слова: трёхслойный стержень, переменное нагружение, температурное воздействие, повреждаемость, вариационный принцип, уравнения равновесия, перемещения, угол поворота

1. Введение

В области строительства и техники широкое применение находят слоистые конструкции, в частности, трёхслойные, выполненные из материалов с существенно отличающимися физико-механическими и прочностными свойствами, обладающие широким спектром новых качеств: высокой несущей способностью и изгибной жесткостью, стойкостью к тепловым воздействиям, сравнительно малым удельным весом по сравнению с традиционными однослойными конструкциями. Несущие слои из материалов высокой прочности и жесткости предназначены для восприятия основной части механической нагрузки. Связующие слои, служащие для образования монолитной конструкции, обеспечивают перераспределение усилий между несущими слоями.

Работа большинства несущих элементов трёхслойных конструкций происходит на фоне выхода материалов за пределы упругости. При действии циклических нагрузок это приводит к возникновению ряда дополнительных явлений, таких как вторичные пластические деформации, изменение диаграмм деформирования, теплообразование, накопление

повреждений и распространение трещин, приводящих к разрушению материалов.

Литературный анализ. В монографии [1] разработаны основные уравнения переменной пластичности, введено кинетическое уравнение повреждаемости для оценки циклической и длительной прочности элементов конструкций. В книге [2] приведены методы расчета многослойных конструкций на статические, динамические и температурные воздействия. Показаны способы определения эффективных физико-механических характеристик, а также оптимального выбора параметров слоистых композиционных материалов. В работах [3–5] проанализированы общие подходы к построению теорий деформирования неоднородных слоистых элементов конструкций при квазистатических и динамических нагрузках. Изложены постановки и методы решения задач трёхслойных элементов конструкций, связанных с учетом упругих оснований при силовых, тепловых и радиационных воздействиях [5]. Учтены физически нелинейные свойства материалов слоев. Приведен ряд аналитических и численных решений для трёхслойных стержней и пластин.



В работе [6] рассмотрены современные проблемы оценки сопротивления материалов и элементов конструкций действию широкого круга повреждающих факторов. Обосновывается применение уравнений состояния, моделей деформирования и разрушения при кратковременном и длительном, малоцикловом и многоцикловом нагружениях. Подробное описание диаграмм циклического деформирования для различных конструкционных материалов выполнено в [7] и показаны возможные уточнения интерпретаций диаграмм при решении задач циклической прочности.

Статья [8] посвящена проблеме построения математических моделей повреждаемых термоупруговязкопластических сред и методам определения «нестандартных» констант моделей, связанных с параметрами повреждаемости и подлежащих экспериментальному определению. В работе [9] рассматривается компьютерное моделирование процессов деформирования, повреждаемости и континуального разрушения нелинейных материалов и конструкций. В статье [10] рассматривается современная теория неупругости (термовязкопластичности), являющаяся обобщением и развитием идей, содержащихся в различных вариантах теории пластичности, ползучести, неупругости и накопления повреждений. Работа [11] посвящена построению определяющих соотношений на основе экспериментального исследования, установлены области физической достоверности теории пластичности применительно к процессам сложного циклического нагружения.

Основы расчета механики слоистых балок, пластин и оболочек при термосиловых нагружениях изложены в монографии [12]. Работы [13, 14] посвящены исследованию изгиба сэндвич-пластин в зависимости от их формы, наличия упругих и жестких опор, упругого основания и вида ячеистого заполнителя.

В статьях [15-16] выведены уравнения равновесия и предложены методы решения упругих, упругопластических и вязкоупругопластических стержней. Численно исследована НДС трехслойных стержней при действии однократных и циклических нагрузок. Сформулирована постановка краевой задачи и получено ее решение для трёхслойной пластины с упругопластическими несущими слоями и нелинейно упругим заполнителем при нагружении из естественного состояния и повторном знакопеременном нагружении. Учтено влияние кольцевой равномерно

распределенной нагрузки и температурного воздействия.

В работах [17-19] приведены постановки и методы решения задач деформирования упругих и упругопластических элементов конструкций при однократном и циклическом нагружениях. На основе вариационного принципа получены система дифференциальных уравнений равновесия и движения для элементов конструкции, при этом учитываются повреждаемости материалов. Приводится упругопластический расчет тонкостенных стержней и магистральных трубопроводов при пространственно-переменном нагружении с учетом обобщенного принципа Мазинга. Исследовано НДС тонкостенных стержней и пластинок при переменном нагружении с учетом вторичных пластических деформаций и повреждаемости материалов.

2. Методология исследования

Целью задачи являются исследования моделей деформирования трёхслойных упругопластических стержней на основе ряда гипотез и вариационного принципа Лагранжа, получение систем дифференциальных уравнений равновесия в перемещениях при переменном нагружении и схема реализации расчета с использованием метода «упругих» решений, а также анализ НДС при однократном и переменном нагружении с учетом обобщенного принципа Мазинга, накопления повреждаемости в слоях и температурного поля.

Постановка задачи. Рассматривается изгиб несимметричного по толщине упругопластического стержня на упругом основании. Система координат связывается со срединной плоскостью заполнителя (рис.1). Допускается, что для тонких несущих слоев 1, 3 справедливы гипотезы Бернулли, а для несжимаемого по толщине заполнителя 2 предполагается, что нормаль остаётся прямолинейной, не изменяет своей длины, но поворачивается на некоторый дополнительный угол $\psi(x)$. Деформации считаются малыми. На внешний слой стержня по длине действуют распределённые силовые нагрузки $p(x)$ и $q(x)$, а также реакция основания $q_R(x)$ (Рис.1). На торцах предполагается наличие жестких диафрагм. Здесь h_k – толщина k -го слоя ($k=1,2,3$ – номер слоя), при этом $h_2=2c$.

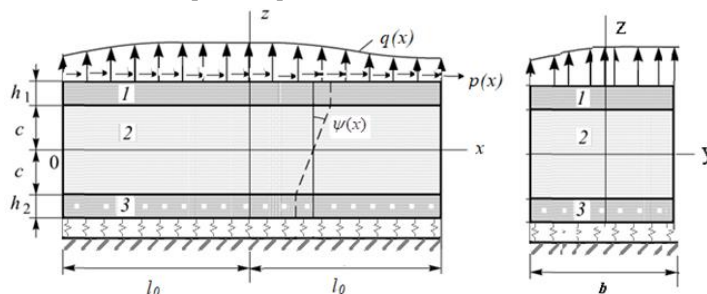


Рис. 1. Нагружение трехслойного стержня, связанного с упругим основанием

В соответствии с принятыми геометрическими гипотезами продольные перемещения в слоях $u^{(k)}$ выражаются через три искомых функции $u(x)$, $\psi(x)$, $w(x)$ [2]:

$$\begin{aligned} u_x^{(1)} &= u + c\psi - zw_{,x}, & c \leq z \leq c + h_1; \\ u_x^{(3)} &= u + z\psi - zw_{,x}, & -c \leq z \leq c; \\ u_x^{(2)} &= u - c\psi - zw_{,x}, & -c - h_2 \leq z \leq -c. \end{aligned} \quad (1)$$



где z – расстояние от рассматриваемого волокна до срединной плоскости заполнителя; запятая в нижнем индексе обозначает операцию дифференцирования по следующей за ней координате.

Используя соотношения Коши и выражения (1),

$$S_{ij}^{(k)} = 2G_k(1 - \omega^k(\varepsilon_u^{(k)}, T^{(k)}))\varepsilon_{ij}^{(k)}; \quad \sigma^k = 3K_k(\varepsilon^{(k)} - \alpha_{0k}T^{(k)}) \quad (2)$$

Здесь $S_{ij}^{(k)}$, $\sigma^{(k)}$, $\varepsilon_{ij}^{(k)}$, $\varepsilon^{(k)}$ – девятёрные и шаровые части тензора напряжений; G_k , K_k – модуль сдвиговой и объёмной деформаций; $\varepsilon_u^{(k)}$ – интенсивность деформации; $\omega^{(k)}(\varepsilon_u^{(k)})$ – в несущих слоях функция

$$\omega^{(k)}(\varepsilon_u^{(k)}) = \begin{cases} 0, & \varepsilon_u^{(k)} \leq \varepsilon_y^{(k)}; \\ A \left(1 - \frac{\varepsilon_y^{(k)}}{\varepsilon_u^{(k)}}\right)^\alpha, & \varepsilon_u^{(k)} > \varepsilon_y^{(k)}; \end{cases} \quad \omega^{(3)}(\varepsilon_u^{(3)}) = \begin{cases} 0, & \varepsilon_u^{(3)} \leq \varepsilon_{u0}^{(3)}; \\ A_1 \left(1 - \frac{\varepsilon_{u0}^{(3)}}{\varepsilon_u^{(3)}}\right)^{\alpha_1}, & \varepsilon_u^{(3)} > \varepsilon_{u0}^{(3)}. \end{cases} \quad (3)$$

Уравнения равновесия при однократном нагружении

Для вывода уравнения равновесия трехслойного стержня воспользуемся вариационным принципом Лагранжа [3]:

$$\delta(A - \Pi) = 0; \quad \delta A = \delta A_1 + \delta A_2 \quad (4)$$

где δA – вариации работы внешних сил:

$$\delta A_1 = b \int_0^l (P \delta u + (q + q_R) \delta W) dx;$$

Здесь q_R – реакция основания по Винклеру $q_R = k_0 w$, k_0 – коэффициент постели, b – ширина сечения стержня. Вариация работы внешних сил и моментов на торцах

$$\delta A_2 = (N_0 - N_l) \delta u + (Q_0 - Q_l) \delta w - (M_0 - M_l) \delta w_x \quad (5)$$

где $N_0, Q_0, M_0, N_l, Q_l, M_l$ – заданные силы и моменты на торцах стержня ($x=0, x=l$). $\delta \Pi$ – вариации потенциальной энергии, имеющие вид [2] ($dv = dz ds$; $ds = b dx$):

$$\delta \Pi = b \int_0^l \left[\sum_{k=1}^3 \int_{h_k} \sigma_x^{(k)} \delta \varepsilon_x^{(k)} dz + 2 \int_{h_3} \sigma_{xz}^{(3)} \delta \varepsilon_{xz}^{(3)} dz \right] dx. \quad (6)$$

Теперь определяем компоненты тензора напряжений в слоях, используя соотношения (2). Выделим линейные (индекс «е») и нелинейные (индекс «ω») части компонентов напряжений в следующем виде [2, 3]:

$$\sigma_x^{(k)} = \sigma_{xe}^{(k)} - \sigma_{x\omega}^{(k)}; \quad \sigma_{xz}^{(3)} = \sigma_{xze}^{(3)} - \sigma_{xz\omega}^{(3)}, \quad (7)$$

где

$$\sigma_{xe}^{(k)} = 2G_k \varepsilon_x^{(k)} + 3K_k \varepsilon^{(k)}; \quad \sigma_{x\omega}^{(k)} = 2G_k \varepsilon_x^{(k)} \omega^{(k)}(\varepsilon_u^{(k)});$$

$$\sigma_{xze}^{(3)} = 2G_3 \varepsilon_{xz}^{(3)}; \quad \sigma_{xz\omega}^{(3)} = 2G_3 \varepsilon_{xz}^{(3)} \omega^{(3)}(\varepsilon_u^{(3)}). \quad (8)$$

Проведем следующую подобную операцию с обобщенными внутренними усилиями и моментами:

$$N^{(k)} = N_e^{(k)} - N_\omega^{(k)}; \quad M^{(k)} = M_e^{(k)} - M_\omega^{(k)}; \quad Q^{(3)} = Q_e^{(3)} - Q_\omega^{(3)}. \quad (9)$$

Здесь соответствующие элементы (6) определяются по формулам, например,

$$N_\omega^{(k)} = b \int_{h_k} \sigma_{x\omega}^{(k)} dz; \quad M_\omega^{(k)} = b \int_{h_k} \sigma_{xz\omega}^{(k)} z dz; \quad Q_\omega^{(3)} = b \int_{-c}^c \sigma_{xz\omega}^{(3)} dz. \quad (10)$$

Определяя вариации работы внешних сил (5), потенциальной энергии (6) и подставляя их в уравнение (4), получаем систему дифференциальных уравнений равновесия трёхслойного стержня на упругом основании в усилиях с учетом физической нелинейности ($q_R = 0$):

$$N_{,x}^e = -bP + N_{,x}^\omega; \quad H_{,x}^e - Q^e = H_{,x}^\omega - Q^e; \quad M_{,xx}^e = -b(q + q_R) + M_{,xx}^\omega, \quad (11)$$

где

$$N^e = \sum_{k=1}^3 N_e^{(k)}, \quad H^e = c(N_e^{(1)} - N_e^{(2)}) + M_e^{(3)}, \quad Q^e = Q_e^{(3)};$$

$$N_\omega = \frac{4}{3} b \sum_{k=1}^3 G_k \int_{h_k} \omega^{(k)} \varepsilon_x^{(k)} dz; \quad M_\omega = \frac{4}{3} b \sum_{k=1}^3 G_k \int_{h_k} \omega^{(k)} \varepsilon_x^{(k)} z dz; \quad Q_\omega = 2bG_3 \int_{-c}^c \omega_3 \psi dz. \quad (12)$$

Определив упругие составляющие внутренних усилий через искомые перемещения u, v, w и подставив их в уравнения (11), получим следующую систему нелинейных дифференциальных уравнений в перемещениях:

$$\begin{aligned} a_1 u_{,xx} + a_6 \psi_{,xx} - a_7 w_{,xxx} &= -p + p_\omega; \\ a_6 u_{,xx} + a_2 \psi_{,xx} - a_3 w_{,xxx} - a_5 \psi &= h_\omega; \\ a_7 u_{,xxx} + a_3 \psi_{,xxx} - a_4 w_{,xxxx} &= -q + q_\omega. \end{aligned} \quad (13)$$

Здесь коэффициенты $a_1, a_2, \dots, a_7$ определяются по формулам:

$$\begin{aligned} a_1 &= K_1^+ h_1 + K_2^+ h_2 + 2K_3^+ c; \quad a_2 = c^2 \left[K_1^+ h_1 + K_2^+ h_2 + \frac{2}{3} K_3^+ c \right]; \\ a_3 &= c \left[K_1^+ h_1 \left(c + \frac{1}{2} h_1 \right) + K_2^+ h_2 \left(c_2 + \frac{1}{2} h_2 \right) + \frac{2}{3} K_3^+ c^2 \right]; \\ a_4 &= K_1^+ h_1 (c^2 + ch_1 + \frac{1}{3} h_1^2) + K_2^+ h_2 (c + ch_2 + \frac{1}{3} h_2^2) + \frac{2}{3} K_3^+ c^2; \\ a_5 &= 2G_3 c; \quad a_6 = c[K_1^+ h_1 - K_2^+ h_2]; \quad a_7 = K_1^+ h_1 \left(c + \frac{1}{2} h_1 \right) - K_2^+ h_2 \left(c_2 + \frac{1}{2} h_2 \right); \\ K_k^+ &= K_k^+ + \frac{4}{3} G_k, \quad (k = 1, 2, 3). \end{aligned} \quad (14)$$



В уравнении (13) нелинейные слагаемые имеют следующий вид:

$$P_{\omega} = \frac{1}{B_0} N_{,x}^{\omega}; \quad h_{\omega} = \frac{1}{B_0} (H_{,x}^{\omega} - Q^{\omega}); \quad q_{\omega} = \frac{1}{B_0} M_{,xx}^{\omega}.$$

Для решения системы (13) принимается приближенный метод – метод упругих решений. Для n -го приближения нетрудно переписать системы уравнений (13). Входящие в правые части величины $p_{\omega}^{(n-1)}$, $h_{\omega}^{(n-1)}$, $q_{\omega}^{(n-1)}$ служат «дополнительными» внешними нагрузками. На первом шаге итерации они

нулевые, в дальнейшем на каждом шаге они вычисляются по результатам предыдущего приближения. Отметим, что процедура получения решения системы уравнений (13) не отличается от задачи теории упругости. В результате получаем искомое аналитическое решение в рекуррентном виде для n -го приближения [2]:

$$\begin{aligned} \psi^{(n)}(x) &= C_2^{(n)} sh(\beta x) + C_3^{(n)} ch(\beta x) + \frac{1}{\beta} [sh(\beta x) \int g^{(n)} ch(\beta x) - ch(\beta x) \int g^{(n)} sh(\beta x) dx]; \\ u^{(n)}(x) &= \gamma_3 \psi^{(n)} + \frac{1}{\alpha_2} [-a_4 L_2^{-1} (p - p_{\omega}^{(n-1)}) + a_7 L_3^{-1} (q - q_{\omega}^{(n-1)}) + \frac{a_7}{2} C_1^{(n)} x^2] + C_7^{(n)} x + C_8^{(n)}; \\ w^{(n)}(x) &= \frac{1}{\alpha_2} [\alpha_1 \int \psi^{(n)} dx - a_7 L_3^{-1} (p - p_{\omega}^{(n-1)}) + a_1 L_4^{-1} (q - q_{\omega}^{(n-1)}) + \frac{1}{6} a_1 C_1^{(n)} x^3] + \frac{1}{2} C_4^{(n)} x^2 + C_5^{(n)} x + C_6^{(n)}, \end{aligned} \quad (15)$$

где

$$g^{(n)}(x) = \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \gamma_1 h_{\omega}^{(n-1)} + \gamma_2 (p - p_{\omega}^{(n-1)}) + \gamma_1 \left(\int (q - q_{\omega}^{(n-1)}) dx + C_1^{(n)} \right)$$

Константы интегрирования $C_1^{(n)}, \dots, C_8^{(n)}$ определяются из условий закрепления стержня.

Переменное нагружение с учетом повреждаемости. Приводим теперь схема построение решения задачи для любого m -го переменного нагружения трехслойного упругопластического стержня на упругом основании с учетом накопления повреждаемости[1]. Предположим, что после $(m-1)$ полуцикла нагружения, начиная с момента t_{m-1} , происходит мгновенная разгрузка и новое нагружение осуществляется усилиями обратного знака $p^{(m)}$, $q^{(m)}$

(здесь индекс « m » – номер нагружения). Эти усилия создадут в k -м слое стержня поле перемещений $\bar{u}^{(m,k)}$, $\bar{v}^{(m,k)}$, $\bar{w}^{(m,k)}$, деформации $\bar{\varepsilon}_x^{(m,k)}$, $\bar{\varepsilon}_y^{(m,k)}$, $\bar{\varepsilon}_z^{(m,k)}$ и напряжений $\bar{\sigma}_x^{(m,k)}$, $\bar{\sigma}_y^{(m,k)}$, $\bar{\sigma}_z^{(m,k)}$, $\bar{\sigma}_{xz}^{(m,k)}$.

Считаем, что соотношения Коши, связывающие деформации и перемещения для величин с «чертой», будут справедливы. Для связи напряжений и деформации примем физические уравнения состояния типа (2), учитывающие повреждаемости материала :

$$\bar{\varepsilon}_{ij}^{(m,k)} = 2G_k \bar{f}^{(m,k)} (\bar{\varepsilon}_u^{(m-1,k)}, \eta^{(m-1,k)}) \bar{\varepsilon}_{ij}^{(m,k)}; \quad \bar{\sigma}^{(m,k)} = 3K_k \bar{\varepsilon}^{(m,k)}, \quad (16)$$

где

$$\bar{f}^{(m,k)} = \left(1 - \omega^{(m,k)} (\bar{\varepsilon}_u^{(m,k)}, \eta^{(m-1,k)}) \right). \quad (17)$$

При учете повреждаемости функции пластичности можно представить в виде

$$\omega^{(m,k)} = \begin{cases} 0, & \bar{\varepsilon}_u^{(m,k)} \leq \bar{\varepsilon}_{sm}^{(k)}(\eta); \\ \lambda_m \left(1 - \frac{\bar{\varepsilon}_{sm}^{(k)}(\eta)}{\bar{\varepsilon}_u^{(m,k)}} \right)^{\alpha}, & \bar{\varepsilon}_u^{(m,k)} > \bar{\varepsilon}_{sm}^{(k)}(\eta). \end{cases} \quad (18)$$

Здесь переменный предел текучести:

$$\bar{\varepsilon}_{sm}^{(k)}(\eta) = \alpha_1^{m-r} (1 + \alpha_1) \varepsilon_{sk}^{(k)} + (3G_{1k})^{-1} \cdot B^{1/\alpha} \left[1 - 0,5(1 + \alpha_1) \alpha_1^{n-2} \right] \cdot [1 - (1 - \eta^{(k)})^{1+m}]^{m-1/\alpha}. \quad (19)$$

Функция повреждаемости $\eta^{(k)}$ определяется из кинетического уравнения [1]:

$$\frac{\partial \eta_m^{(k)}}{\partial \lambda_m} = f^{(m,k)} (\bar{\sigma}_u^{(m,k)}, \eta_m^{(k)}); \quad f^{(m,k)} = A \frac{(\bar{\sigma}_u^{(m,k)})^{\alpha}}{(1 - \gamma \eta_m^{(k)})^{\beta}} \quad (20)$$

при условии $\eta(0) = 0$, $\eta(\lambda_N) = 1$, где λ_N – число полуциклов до наступления предельного состояния (разрушения).

Используя физические соотношения (17), здесь также компоненты напряжений и внутренних усилий подразделим на линейные и нелинейные составляющие,

$$\bar{N}_e^{(m,k)} = b \int_{h_k} \bar{\sigma}_{xe}^{(m,k)} dz, \dots, \quad \bar{M}_{\omega}^{(m,k)} = b \int_{h_k} \bar{\sigma}_{z\omega}^{(m,k)} z dz. \quad (21)$$

В этом случае, соответствующие итерационные уравнения равновесия стержня в перемещениях (13) на n -м шаге для величин с чертой при m -м полуцикле имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} a_1 \bar{u}_{,xx}^{(m,n)} + a_6 \bar{\psi}_{,xx}^{(m,n)} - a_7 \bar{w}_{,xxx}^{(m,n)} &= -\bar{p}^{(m)} + \bar{p}_{\omega}^{(m,n-1)}; \\ a_6 \bar{u}_{,xx}^{(m,n)} + a_2 \bar{\psi}_{,xx}^{(m,n)} - a_3 \bar{w}_{,xxx}^{(m,n)} - a_5 \bar{\psi}^{(m,n)} &= \bar{h}_{\omega}^{(m,n-1)}; \\ a_7 \bar{u}_{,xxx}^{(m,n)} + a_3 \bar{\psi}_{,xxx}^{(m,n)} - a_4 \bar{w}_{,xxx}^{(m,n)} &= -\bar{q}^{(m)} + \bar{q}_{\omega}^{(m,n-1)}. \end{aligned} \quad (22)$$

Величины $\bar{p}_{\omega}^{(m,n-1)}$, $\bar{h}_{\omega}^{(m,n-1)}$, $\bar{q}_{\omega}^{(m,n-1)}$, соответствующие неупругим составляющим в (22) на первом шаге при не учёте повреждаемости считаем известными, в следующем шаге вычисляются по результатам предыдущего приближения, т.е.

$$x = 0, \quad l: \quad \bar{w}^{(m,n)} = \bar{u}^{(m,n)} = \bar{\psi}^{(m,n)} = \bar{w}_{,x}^{(m,n)} = 0. \quad (23)$$

используется модификация метода «упругих» решений. Для решения краевых задач необходимо добавить граничные условия. Например, в случае жёсткой заделки обоих торсов стержня должны выполняться граничные условия:



Отметим, что искомые решения задачи на m -м нагружении с учетом приведённых соотношений определяются следующим образом:

$$\sigma_x^{(m,k)}(x,z) = \sigma_x^{(k)} - \sum_{m=2}^N (-1)^m \bar{\sigma}_x^{(m,k)}(x,z); \quad \varepsilon_x^{(m,k)}(x,z) = \varepsilon_x^{(k)} - \sum_{m=2}^N (-1)^m \bar{\varepsilon}_x^{(m,k)}(x,z), \quad (25)$$

где величины с одним штрихом – напряжения и деформации в трехслойном стержне при однократном нагружении.

Таким образом, краевая задача для величин с «чертой» с точностью до обозначений совпадает с краевой задачей упругопластического расчета. Поэтому в некоторых случаях можно будет построить рекуррентные численно – аналитические решения [3, 5].

Примеры расчета. В качестве примера приведем результаты расчета деформирования трехслойных стержней при знакопеременном нагружении. Трехслойный стержень выполнен из материалов D16T –

фторопласта – D16T с толщиной слоев: $h_1 = h_2 = 0.03$, $c = 0.09$. На рис.2 показано изменение прогиба $w^{(m)}(x)$ и $\psi^{(m)}(x)$ трехслойного стержня (консольное закрепление) при знакопеременном нагружении: 1 – упругий расчет; 2 – упругопластический; 3^x – упругопластический на 10-м полуцикле. Здесь кривые с одним штрихом соответствуют нагружению из естественного состояния, с двумя означают – повторный изгиб знакопеременной нагрузкой ($q = 2.5 \text{ МПа}$).

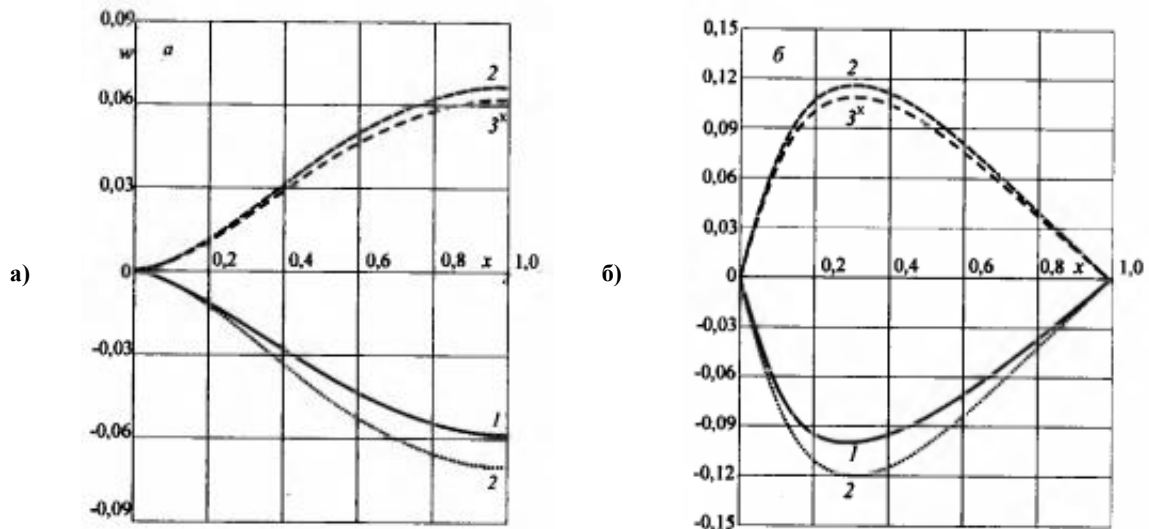


Рис. 2. Изменение прогиба $w^{(m)}$ (а) и сдвига $\psi^{(m)}$ (б) трехслойного стержня

Отметим, что учет нелинейности в данной задаче приводит к увеличению максимальных напряжений во внешних слоях на 4–5%, в заполнителе на 12–14%. В работе [3] отмечено, что результаты расчета существенно зависят от значения коэффициента постели k_0 ($k_0 = 1, 10^2, 10^5 \text{ МПа/м}$).

В качестве второго примера проводятся результаты расчета трехслойного стержня со сжимаемым заполнителем в температурном поле. Материалы слоев также D16T-фторопласт-D16T. Интенсивность поверхностной нагрузки $q_0 = -10 \text{ МПа}$. Относительная толщина слоев $h_1 = 0.04$, $h_2 = 0.02$, $h_3 = 0.18$. Температурный режим применяется таким, как в работе

[2]. Для учета влияния температуры на упругие характеристики материала несущих слоев принималась формула Белла, для заполнителя – температурная составляющая из [2].

На Рис. 3. а) и б) показано влияние температуры и физической нелинейности материалов: на прогибы – а) и продольные перемещения – б) в первом слое. Нумерация кривых: 1-упругий стержень; 2-термоупругий; 3-термоупругопластический. Здесь увеличение продольных перемещений незначительно, у прогибов оно составляет в конечном итоге 53 % по сравнению с упругим.

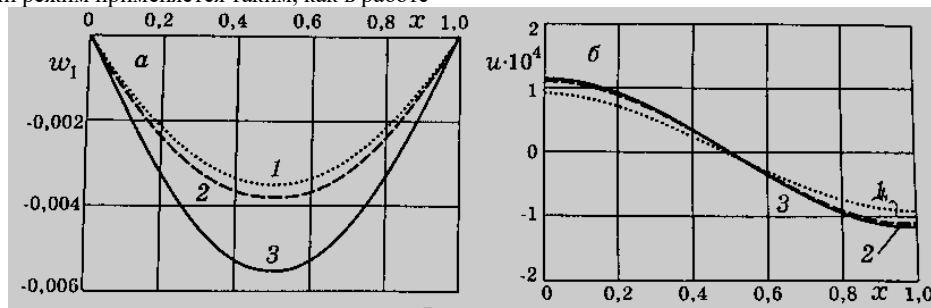


Рис. 3. Изменение прогиба w_1 (а) и продольного перемещения u (б) трехслойного стержня

Относительная деформация заполнителя ε_{zz} изменяет свою форму, а именно кроме обжатия появляются зоны растяжения вблизи опор в

заполнителе, где и достигаются максимальные значения.

3. Заключение

На основе вариационного принципа Лагранжа сформулирована постановка задачи, приведены система дифференциальных уравнений равновесия в перемещениях трёхслойного упругопластического стержня при однократном и переменном нагружении с учетом повреждаемости. Проанализирована кинетика напряженно-деформированного состояния трёхслойного стержня при знакопеременном нагружении с учетом циклических характеристик материалов и температурного поля. Показано, что использование обобщенного принципа Мазинга при расчете трехслойных стержней позволяет получить решение задачи для любого интересующего цикла нагружений.

Использованная литература / References

- [1] Москвитин В.В. Циклические нагружения элементов конструкций. М.: URSS. 2019, 344 с. (перезд).
- [2] Болотин В.В., Новичков Ю.Н. Механика многослойных конструкций. –М.: Машиностроение. – 1980. –375 с.
- [3] Старовойтов Э.И., Яровая А.В., Леоненко Д.В. Деформирование трехслойных элементов конструкции на упругом основании. М.: Физматлит, 2006. – 379 с.
- [4] Старовойтов Э. И., Леоненко Д. В., Рабинский Л. Н. Деформирование трехслойных физически нелинейных стержней. М.: МАИ, 2016. –184 с.
- [5] Савицкий Д.М. Изгиб упругого трехслойного стержня в нейтронном потоке // Проблемы машиностроения и автоматизации. 2014. №3. С.110 – 114.
- [6] Трошенко В.Т., Лебедев А.А. и др. Механическое поведение материалов при различных видах нагружений. Киев, 2000. –571 с.
- [7] Гусенков А.П., Москвитин Г.В., Хорошилов В.Н. Малоцикловая прочность оболочечных конструкций. М.: Наука, 1989. –254 с.
- [8] Киселев А.Б. Модели необратимого динамического деформирования и микроразрушения повреждаемых сред. //Упругость и неупругость. М.: Изд-во МГУ, 2001. С. 381–383.
- [9] Кукуджанов В .Н. Компьютерное моделирование деформирования, повреждаемости и разрушения неупругих материалов и конструкций. М.: МФТИ, 2008. – 215 с.
- [10] Бондарь В.С. Термовязкопластичность. Теория и эксперимент // Упругость и неупругость. М.: Изд-во Московского университета, 2011. С.122–128.
- [11] Абиров Р.А. Развитие математической модели пластичности с учетом деформирования материалов при сложном нагружении: Автореф. дис...докт. физ.-мат-наук, Ташкент: 2014. –52с.
- [12] Carrera E., Fazzolari F.A., Cinefra M. Thermal Stress Analysis of Composite Beams, Plates and Shells: Computational Modelling and Applications. Academic Press, 2016. – 410 p.
- [13] Lee C.R., Sun S.J., Kam T.Y. System parameters evaluation of flexibly supported laminated composite sandwich plates // AIAA Journal. Vol.45. 2007. №9. Pp.2312 – 2322.
- [14] Zenkour A. M., Alghamdi N. A. Thermomechanical bending response of functionally graded nonsymmetric sandwich plates // Journal of Sandwich Structures and Materials. Vol.12. 2009. №1. Pp.7 – 46.
- [15] Старовойтов Э.И., Яровая А.В. Вязкоупругопластический трехслойный стержень при термосиловых нагрузках // МТТ. Изв. РАН. 1998. № 3. С. 109–116.
- [16] Старовойтов Э.И., Леоненко Д.В., Абдусаттаров А. Изгиб трехслойной пластины в температурном поле знакопеременной кольцевой нагрузкой // Механика композиционных материалов и конструкций. Т.28. 2022. №3. С.339 – 358.
- [17] Abdusattarov A., Starovoitov E.I., Ruzieva N.B. Modeling of Nonlinear Deformation and Damage of Underground Core Pipelines Under Cyclic Loads, Taking into Account Large Deformations AIP Conf. Proc.3265, 050007 (2025). <https://doi.org/10.1063/5.0265356>
- [18] Абдусаттаров А., Старовойтов Э.И., Рузиева Н.Б. Деформирование и повреждаемость упругопластических элементов конструкций при циклических нагружениях. Ташкент: «IDEAL PRESS», 2023. – 381 с.
- [19] Абдусаттаров А. Прикладные задачи механики деформируемого твердого тела. Ташкент: «IDEAL PRESS», 2024. – 221 с.

Информация об авторах/ Information about the authors

Абдусаттаров А. Ташкентский государственный транспортный университет, Ташкент, Узбекистан

Старовойтов Э.И. Белорусский государственный университет транспорта, Гомель, Беларусь



G. Khalfin*Innovative development of the engineering education system.....214***E. Shchipacheva, R. Pirmatov***About improving the system of personnel training for construction industry.....216***A. Abdusattarov, E. Starovoitov***Elastic-plastic bending of three-layer rods under single and variable loading, taking into account damage and temperature effects.....219***Sh. Tadjibayev***Mathematical modeling using software to determine the stability of railway track slopes in sandy soils.....225***H. Samandarov, A. Ibadullaev, M. Vapaev, E. Teshabaeva***Wear-resistant elastic composite materials working in difficult conditions.....230*