

# ENGINEER



international scientific journal

## SPECIAL ISSUE

E-ISSN

3030-3893

ISSN

3060-5172



A bridge between science and innovation



**TOSHKENT DAVLAT  
TRANSPORT UNIVERSITETI**  
Tashkent state  
transport university



# **ENGINEER**

**A bridge between science and innovation**

**E-ISSN: 3030-3893**

**ISSN: 3060-5172**

**SPECIAL ISSUE**

**16-iyun, 2025**



[engineer.tstu.uz](http://engineer.tstu.uz)

**“QURILISHDA YASHIL IQTISODIYOT, SUV VA ATROF-MUHITNI ASRASH TENDENSIYALARI, EKOLOGIK MUAMMOLAR VA INNOVATSION YECHIMLAR” MAVZUSIDAGI RESPUBLIKA MIQYOSIDAGI ILMIY-AMALIY KONFERENSIYA TASHKILIY QO‘MITASI**

1. Abdurahmonov O.K. – O‘zbekiston Respublikasi Prezidenti Administratsiyasi ijtimoiy rivojlantirish departamenti rahbari, Toshkent davlat transport universiteti rektori
2. Gulamov A.A – Toshkent davlat transport universiteti prorektori
3. Shaumarov S.S – Toshkent davlat transport universiteti prorektori
4. Suvonqulov A.X. – O‘zsuvta’minoti AJ raisi
5. Xamzayev A.X. – O‘zbekiston ekologik partiyasi raisi
6. Maksumov N.E. – O‘zbekiston Respublikasi Vazirlar Mahkamasi huzuridagi Qurilish va uy-joy kommunal xo‘jaligi sohasida nazorat qilish inspeksiysi boshlig‘i o‘rinbosari
7. Baratov D.X. – Toshkent davlat transport universiteti prorektori
8. Turayev B. X – Toshkent davlat transport universiteti prorektori
9. Norkulov S.T. – Toshkent davlat transport universiteti prorektori
10. Adilxodjayev A.E. – Universitedagi istiqbolli va strategik vazifalarni amalga oshirish masalalari bo‘yicha rektor maslahatchisi
11. Negmatov S.S. – “Fan va taraqqiyot” DUK ilmiy rahbari, O‘zbekiston Respublikasi Fanlar Akademiyasi Akademigi
12. Abed N.S. – “Fan va taraqqiyot” DUK raisi
13. Merganov A.M – Ilmiy tadqiqotlar, innovatsiyalar va ilmiy-pedagogik kadrlar tayyorlash bo‘limi boshlig‘i
14. Ibadullayev A. – Muhandislik kommunikatsiyalari va tizimlari kafedrasi professori
15. Rizayev A. N. – Muhandislik kommunikatsiyalari va tizimlari kafedrasi professori
16. Xalilova R.X. – Muhandislik kommunikatsiyalari va tizimlari kafedrasi professori
17. Babayev A.R. – “Qurilish muhandisligi” fakulteti dekani
18. Boboxodjayev R.X – Tahririy nashriyot va poligrafiya bo‘limi boshlig‘i
19. Talipov M.M – Ilmiy nashrlar bilan ishslash bo‘limi boshlig‘i
20. Maxamadjonova Sh.I. - Matbuot xizmati kontent-menedjeri
21. Umarov U.V. – Muhandislik kommunikatsiyalari va tizimlari kafedrasi mudiri
22. Eshmamatova D.B. – Oliy matematika kafedrasi mudiri
23. Muxammadiyev N.R. – Bino va sanoat inshootlari qurilishi kafedrasi mudiri
24. Tursunov N.Q. – Materialshunoslik va mashinasozlik kafedrasi mudiri
25. Shermuxammedov U.Z. – Ko‘priklar va tonnellar kafedrasi mudiri
26. Lesov Q.S. – Temir yo‘l muhandisligi kafedrasi mudiri
27. Pirnazarov G‘.F. – Amaliy mehanika kafedrasi mudiri
28. Teshabayeva E.U. – Tabiiy fanlar kafedrasi professori
29. Chorshanbiyev Umar Ravshan o‘g‘li – Muhandislik kommunikatsiyalari va tizimlari kafedrasi dotsent v.b.
30. Obidjonov Axror Jo‘raboy o‘g‘li – Muhandislik kommunikatsiyalari va tizimlari kafedrasi assistenti

## Instantaneous axis of helical motion of a rigid body

**M.Z. Sadulaeva<sup>1</sup>, J.S. Abdinabiev<sup>2</sup>, S.S. Turdiev<sup>1</sup>**

<sup>1</sup>Tashkent State Transport University, Tashkent, Uzbekistan

<sup>2</sup>National Research University "TIAME", Uzbekistan

**Abstract:** This study investigates the state of the instantaneous screw axis (ISA) during the motion of a rigid body. It also introduces a method for altering the representation of rigid body motion. The paper demonstrates how translational and rotational motion parameters of a rigid body can be expressed as functions of the invariants of instantaneous screw motion (ISM). By using these invariants, a more generalized and compact formulation of rigid body motion is achieved. The approach helps to describe complex motion behaviors with greater clarity and mathematical efficiency. This framework is applicable to a wide range of mechanical and robotic systems, offering improved insight into motion analysis and control through ISM-based modeling techniques.

**Keywords:** Instantaneous screw axis, invariant description of motion, inverse problem

## Мгновенная ось винтового движения твердого тела

**Садуллаева М.З.<sup>1</sup>, Абдинабиев Ж.С.<sup>2</sup>, Турдиев С.С.<sup>1</sup>**

<sup>1</sup>Ташкентский государственный университет транспорта, Ташкент,

<sup>2</sup>Национальный исследовательский университет «ТИАМЭ», Узбекистан

**Аннотация:** В данной работе исследуется состояние мгновенной оси винта (ISA) во время движения жесткого тела. Также вводится метод изменения представления движения жесткого тела. В работе показано, как параметры поступательного и вращательного движения жесткого тела могут быть выражены как функции инвариантов мгновенного винтового движения (ISM). Использование этих инвариантов позволяет получить более обобщенную и компактную формулировку движения жесткого тела. Этот подход помогает описать сложное поведение движения с большей ясностью и математической эффективностью. Этот подход применим к широкому кругу механических и роботизированных систем, предлагая более глубокое понимание анализа движения и управления с помощью методов моделирования на основе ISM.

**Ключевые слова:** Мгновенная ось винта, инвариантное описание движения, обратная задача

## 1. Введение

В отличие от традиционного представления движения в терминах не связанных друг с другом перевода и вращения, Гулио Моцци в 1763 году доказал, что любое общее движение твердого тела может быть описано мгновенной винтовой осью (ISA) [1,2]. Одним из применений концепции ISM в кинематике жесткого тела является инвариантное описание движения жесткого тела, представленное Дж. Шуттером [3]. Дж. Анджелес описал автоматическое вычисление винтовых параметров движения жесткого тела как для конечного, так и для бесконечно удаленного положения [5,6]. Глубокое исследование винтового исчисления и его приложений в механике в терминах векторного анализа представлено в работе [7].

В данной работе состояние ISA будет определяться как функции инвариантов. Кроме того, будет рассмотрена проблема перехода между двумя различными методами определения движения жесткого тела.

## 2. Обратная задача

Движение жесткого тела может быть описано с помощью шести независимых инвариантов мгновенного винтового движения (ISM) [3]. Выражения для этих шести инвариантов ( $i_{1-6}$ ) получаются в следующем виде [3]:

$$\begin{aligned} i_1 &= f_1(\boldsymbol{\omega}), i_2 = f_2(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{v}), i_3 = f_3(\boldsymbol{\omega}, \dot{\boldsymbol{\omega}}), \\ i_4 &= f_4(\boldsymbol{\omega}, \dot{\boldsymbol{\omega}}, \boldsymbol{v}, \dot{\boldsymbol{v}}), \quad i_5 = f_5(\boldsymbol{\omega}, \dot{\boldsymbol{\omega}}, \dot{\boldsymbol{v}}), \\ i_6 &= f_6(\boldsymbol{\omega}, \dot{\boldsymbol{\omega}}, \ddot{\boldsymbol{\omega}}, \boldsymbol{v}, \dot{\boldsymbol{v}}, \ddot{\boldsymbol{v}}), \end{aligned} \quad (2.1)$$

где  $\boldsymbol{\omega}$  и  $\boldsymbol{v}$  - векторы угловой и поступательной скоростей соответственно.

В этом разделе будет рассмотрена обратная задача перехода от инвариантного описания к традиционному описанию движения твердого тела. Традиционные параметры можно записать как функции инвариантов. В зависимости от точки отсчета векторы скорости могут

быть найдены из следующих уравнений:

$$\omega = i_1 \cdot e_x,$$

$$v = i_2 \cdot e_x + p \times (i_1 \cdot e_x),$$

где  $e_x$  - единичный вектор,  $p$  - вектор, начинающийся из опорной точки и перпендикулярный ISA. Радиус-вектор и угловой вектор будут вычислены с помощью

$$\begin{aligned} r(t) &= \int_{t_0}^t v(t) dt = \int_{t_0}^t i_1(t) \cdot e_x(t) dt, \\ \theta(t) &= \int_{t_0}^t \omega(t) dt = \int_{t_0}^t [i_2(t) \cdot e_x(t) + p(t) \times (i_1(t) \cdot e_x(t))] dt. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Переменные в функциях управления могут быть выражены как функции инвариантов с помощью уравнений (2.2), и тогда функция управления будет функцией инвариантов.

### 3. Движение ISA

Положение ISA можно определить по положению точки, находящейся на ISA, и вектору  $e_x$ . Без потери общности была выбрана центральная точка о (см. рис. 1), и ее движение будет рассмотрено ниже. Если положение жесткого тела, углы Эйлера и векторы скоростей определяются как

$$\xi = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, \eta = \begin{bmatrix} \phi \\ \theta \\ \psi \end{bmatrix}, \dot{\xi} = v = \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{bmatrix},$$

$$\omega = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\sin\theta \\ 0 & \cos\phi & \cos\theta\sin\phi \\ 0 & -\sin\phi & \cos\theta\cos\phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix},$$

где  $x, y, z$  - координаты опорной точки жесткого тела.

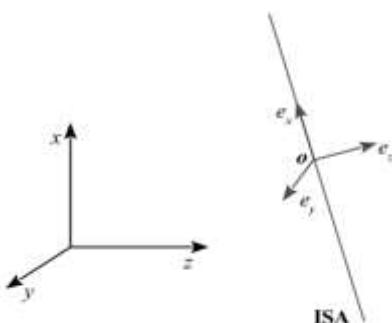


Рис. 1. ISA в декартовой системе координат

Тогда единичные векторы  $e_x$  и  $e_y$  будут определены следующим образом:

$$e_x = \frac{\omega}{\|\omega\|} = \begin{bmatrix} \frac{(\dot{\phi} - \dot{\psi}\sin\theta)}{\gamma} \\ \frac{\gamma}{\dot{\theta}\cos\phi + \dot{\psi}\cos\theta\sin\phi} \\ \frac{(\dot{\psi}\cos\theta\cos\phi - \dot{\theta}\sin\phi)}{\gamma} \end{bmatrix},$$

$$e_y = \frac{\omega \times \dot{\omega}}{\|\omega \times \dot{\omega}\|}, \quad (3.1)$$

Где

$$\gamma = \|\omega\| = \sqrt{\dot{\phi}^2 + \dot{\theta}^2 + \dot{\psi}^2 - 2\dot{\phi}\dot{\psi}\sin\theta},$$

$$\dot{\omega} = [\dot{\omega}_x \quad \dot{\omega}_y \quad \dot{\omega}_z]^T, \quad (3.2)$$

$$\omega_x = \ddot{\phi} - \ddot{\psi}\sin\theta - \dot{\psi}\theta\cos\theta,$$

$$\omega_y = \ddot{\theta}\cos\phi - \dot{\theta}\dot{\phi}\sin\phi + \ddot{\psi}\cos\theta\sin\phi - \dot{\psi}\theta\sin\theta\sin\phi + \dot{\phi}\psi\cos\theta\cos\phi,$$

$$\omega_z = \ddot{\psi}\cos\theta\cos\phi - \dot{\psi}\theta\sin\theta\cos\phi - \dot{\phi}\psi\cos\theta\sin\phi - \dot{\theta}\sin\phi - \dot{\theta}\phi\cos\phi.$$

Положение центральной точки о можно определить через  $\zeta$ :

$$\zeta = [\hat{x} \quad \hat{y} \quad \hat{z}]^T \quad (3.3)$$

где  $\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}$  - координаты о.

Вектор скорости о состоит из двух составляющих скоростей: одна направлена вдоль  $e_x$  и ее значение равно  $i_6$  (6-й инвариант), а другая - вдоль  $e_y$  и ее значение равно  $i_4$  (4-й инвариант). Таким образом, для движения о можно записать следующее выражение:

$$\zeta = i_6 \cdot e_x + i_4 \cdot e_y, \quad (3.4)$$

где

$$i_4 = e_y \cdot \dot{p},$$

$$i_6 = e_x \cdot \dot{p} - \frac{d}{dt} \frac{(e_x \times e_y) \cdot \dot{p} \cdot \|\omega\|^2}{\|\omega \times \dot{\omega}\|}. \quad (3.5)$$

Уравнение (3.4) - это уравнение движения центральной точки о. Уравнения (3.1) и (3.4) достаточны для определения движения ISA. Теперь ниже рассматриваются выражения  $i_4$  и  $i_6$  как функции управляемых параметров. Согласно второму закону Ньютона

$$m\ddot{r} = F, \quad I\ddot{\theta} = \tau, \quad (3.6)$$

Где  $F$  - полная сила,  $\tau$  - полный момент,  $m$  - масса твердого тела,  $I$  - матрица инерции. Известно, что

$$F = \frac{dP}{dt}, \quad \tau = \frac{dL}{dt}, \quad (3.7)$$

где  $P$  и  $L$  - линейный и угловой моменты соответственно.

Уравнения (3.5) приобретают вид

$$i_4 = \mathbf{e}_y \cdot \dot{\mathbf{p}} = \frac{(\hat{\mathbf{L}} \times \hat{\mathbf{r}})}{\|\hat{\mathbf{L}} \times \hat{\mathbf{r}}\|} \cdot \frac{(\hat{\mathbf{r}} \times \mathbf{P} + \hat{\mathbf{L}} \times \mathbf{F}) \|\hat{\mathbf{L}}\|^2 - 2(\hat{\mathbf{L}} \times \mathbf{P}) \cdot (\hat{\mathbf{L}} \cdot \hat{\mathbf{r}})}{m \|\hat{\mathbf{L}}\|^3},$$

$$i_6 = \frac{\hat{\mathbf{L}} \cdot (\hat{\mathbf{r}} \times \mathbf{P})}{m \|\hat{\mathbf{L}}\|^2} - \frac{d}{dt} \left[ \frac{(\hat{\mathbf{L}} \times (\hat{\mathbf{L}} \times \hat{\mathbf{r}})) \cdot (\hat{\mathbf{r}} \times \mathbf{P} + \hat{\mathbf{L}} \times \mathbf{F}) \|\hat{\mathbf{L}}\|^2 - 2(\hat{\mathbf{L}} \times \mathbf{P}) \cdot (\hat{\mathbf{L}} \cdot \hat{\mathbf{r}})}{m \|\hat{\mathbf{L}}\|^3} \right].$$

Где  $\hat{\mathbf{L}} = \mathbf{I}^{-1} \mathbf{L}$ ,  $\hat{\mathbf{r}} = \mathbf{I}^{-1} \mathbf{r}$ . Если жестким телом является квадрокоптер, то матрица инерции может быть записана как

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} I_x & 0 & 0 \\ 0 & I_y & 0 \\ 0 & 0 & I_z \end{bmatrix}.$$

### 3. Заключение

В данном исследовании был проведен тщательный анализ движения мгновенной оси винта (ISA) при движении жесткого тела и успешно получены соответствующие уравнения движения. Значительное внимание было уделено формулировке векторов скорости в терминах инвариантов, связанных с мгновенным движением винта (ISM). Взаимосвязи для векторов положения и скорости были получены аналитическим путем, что позволило создать четкую математическую основу для описания движения жесткого тела с использованием принципов ISM. Также было показано, что состояние ISA зависит от 4-го и 6-го инвариантов.

Полученные результаты показывают, что векторы положения и скорости жесткого тела могут быть представлены в явном виде через первый и второй инварианты ISM, что упрощает анализ и улучшает физическое понимание движения. Кроме того, выяснилось, что динамическое состояние и ориентация ISA определяются в основном четвертым и шестым инвариантами. Это позволяет глубже понять роль, которую играют эти инварианты в общей характеристике движения системы. Представленные результаты способствуют разработке более обобщенного и эффективного метода моделирования и анализа движения жесткого тела, особенно в системах, включающих сложные механические взаимодействия или требующих высокой точности, таких как робототехника, биомеханика и аэрокосмические механизмы.

### Использованная литература / References

- [1] Mozzi, G., "Discorso Matematico sopra il Rotamento Momentaneo dei Corpi," Stamperia del Donato Campo, Napoli, 1763.
- [2] Ceccarelli, M., 1995, "Screw Axis Defined by Giulio Mozzi in 1763," Ninth World Congress IFToMM, Milano, Italy, pp. 3187–3190.
- [3] Joris De Schutter, "Invariant description of rigid body motion trajectories", Journal of Mechanisms and Robotics, 2010.
- [4] A. P. Markeev, "Theoretical Mechanics (Teoreticheskaya mehanika)"(in Russian), Moskva Nauka 1990, pp. 63-69.

[5] Jorge Angeles, "Automatic Computation of the Screw Parameters of Rigid-Body Motions. Part I: Finitely-Separated Positions", Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control, 1986, Vol. 108, pp. 32-38.

[6] Jorge Angeles, "Automatic Computation of the Screw Parameters of Rigid-Body Motions. Part II: Infinitesimally-Separated Positions", Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control, 1986, Vol. 108, pp. 39-43.

[7] F. M. Dimentberg, "The screw calculus and its applications in mechanics", Moskva Nauka 1965.

### Информация об авторах/ Information about the authors

**М.З. Садуллаева** Доцент кафедры высшей математики, Ташкентский государственный транспортный университет, Узбекистан  
E-mail: [mavjudah1975m@mail.ru](mailto:mavjudah1975m@mail.ru)  
<https://orcid.org/0000-0002-6999-3472>

**Ж.С. Абдинабиев** Кафедра механики и компьютерного моделирования, Национальный исследовательский университет «ТИАМЭ», Узбекистан E-mail: [jasur.nuuz@gmail.com](mailto:jasur.nuuz@gmail.com)  
<https://orcid.org/0000-0002-3708-9614>

**С.С. Турдиев** Ассистент кафедры высшей математики, Ташкентский государственный транспортный университет, Узбекистан  
E-mail: [s.turdiev@alumni.nsu.ru](mailto:s.turdiev@alumni.nsu.ru)  
<https://orcid.org/0000-0003-3599-1716>

**D. Ibrohimova**

*On the geometry of nodal sets of eigenfunctions of fractional powers of the laplace operator .....* 305

**A. Alimov, E. Aliev**

*Leibniz algebras generated using the image of Euclidean algebras.....* 308

**J. Azimov, N. Namozov**

*Analysis of the annual change in the volume of cargo turnover of road transport through the time series model .....* 311

**D. Eshmamatova, D. Khakimova, S. Zavgorodneva**

*Analysis of the dynamics of the viral infection spread model.....* 314

**Sh. Kasimov, N. Shomurodov**

*Propagation of spherical shock waves in a contiguous elastic-plastic environment .....* 319

**L. Sharipova, H. Raufov**

*Time series modeling and prediction.....* 322

**M. Sadullaeva, J. Abdinabiev, S. Turdiev**

*Instantaneous axis of helical motion of a rigid body.....* 327

**A. Artykbaev, M. Ergashaliev**

*Method for determining the optimal length of the transition part of a railway track plan .....* 330

CONTEX / MUNDARIA