

ENGINEER



international scientific journal

SPECIAL ISSUE

E-ISSN

3030-3893

ISSN

3060-5172



SLIB.UZ
Scientific Library of Uzbekistan



A bridge between science and innovation



**TOSHKENT DAVLAT
TRANSPORT UNIVERSITETI**

Tashkent state
transport university



ENGINEER

A bridge between science and innovation

E-ISSN: 3030-3893

ISSN: 3060-5172

SPECIAL ISSUE

16-iyun, 2025



engineer.tstu.uz

**“QURILISHDA YASHIL IQTISODIYOT, SUV VA ATROF-MUHITNI ASRASH
TENDENSIYALARI, EKOLOGIK MUAMMOLAR VA INNOVATSION
YECHIMLAR” MAVZUSIDAGI RESPUBLIKA MIQYOSIDAGI
ILMIY-AMALIY KONFERENSIYA
TASHKILIY QO‘MITASI**

1. Abdurahmonov O.K. – O‘zbekiston Respublikasi Prezidenti Administratsiyasi ijtimoiy rivojlantirish departament rahbari, Toshkent davlat transport universiteti rektori
2. Gulamov A.A – Toshkent davlat transport universiteti prorektori
3. Shaumarov S.S – Toshkent davlat transport universiteti prorektori
4. Suvonqulov A.X. – O‘zsuvta’minoti AJ raisi
5. Xamzayev A.X. – O‘zbekiston ekologik partiyasi raisi
6. Maksumov N.E. – O‘zbekiston Respublikasi Vazirlar Mahkamasi huzuridagi Qurilish va uy-joy kommunal xo‘jaligi sohasida nazorat qilish inspeksiyasi boshlig‘i o‘rinbosari
7. Baratov D.X. – Toshkent davlat transport universiteti prorektori
8. Turayev B. X – Toshkent davlat transport universiteti prorektori
9. Norkulov S.T. – Toshkent davlat transport universiteti prorektori
10. Adilxodjayev A.E. – Universitetdagi istiqbolli va strategik vazifalarni amalga oshirish masalalari bo‘yicha rektor maslahatchisi
11. Negmatov S.S. – “Fan va taraqqiyot” DUK ilmiy rahbari, O‘zbekiston Respublikasi Fanlar Akademiyasi Akademigi
12. Abed N.S. – “Fan va taraqqiyot” DUK raisi
13. Merganov A.M – Ilmiy tadqiqotlar, innovatsiyalar va ilmiy-pedagogik kadrlar tayyorlash bo‘limi boshlig‘i
14. Ibadullayev A. – Muhandislik kommunikatsiyalari va tizimlari kafedrasini professori
15. Rizayev A. N. – Muhandislik kommunikatsiyalari va tizimlari kafedrasini professori
16. Xalilova R.X. – Muhandislik kommunikatsiyalari va tizimlari kafedrasini professori
17. Babayev A.R. – “Qurilish muhandisligi” fakulteti dekani
18. Boboxodjayev R.X – Tahririy nashriyot va poligrafiya bo‘limi boshlig‘i
19. Talipov M.M – Ilmiy nashrlar bilan ishlash bo‘limi boshlig‘i
20. Maxamadjonova Sh.I. - Matbuot xizmati kontent-menedjeri
21. Umarov U.V. – Muhandislik kommunikatsiyalari va tizimlari kafedrasini mudiri
22. Eshmamatova D.B. – Oliy matematika kafedrasini mudiri
23. Muxammadiyev N.R. – Bino va sanoat inshootlari qurilishi kafedrasini mudiri
24. Tursunov N.Q. – Materialshunoslik va mashinasozlik kafedrasini mudiri
25. Shermuxammedov U.Z. – Ko‘priklar va tonnellar kafedrasini mudiri
26. Lesov Q.S. – Temir yo‘l muhandisligi kafedrasini mudiri
27. Pirnazarov G‘.F. – Amaliy mexanika kafedrasini mudiri
28. Teshabayeva E.U. – Tabiiy fanlar kafedrasini professori
29. Chorshanbiyev Umar Ravshan o‘g‘li – Muhandislik kommunikatsiyalari va tizimlari kafedrasini dotsent v.b.
30. Obidjonov Axror Jo‘raboy o‘g‘li – Muhandislik kommunikatsiyalari va tizimlari kafedrasini assistenti



Instantaneous axis of helical motion of a rigid body

M.Z. Sadulaeva¹, J.S. Abdinabiev², S.S. Turdiev¹

¹Tashkent State Transport University, Tashkent, Uzbekistan

²National Research University "TIAME", Uzbekistan

Abstract: This study investigates the state of the instantaneous screw axis (ISA) during the motion of a rigid body. It also introduces a method for altering the representation of rigid body motion. The paper demonstrates how translational and rotational motion parameters of a rigid body can be expressed as functions of the invariants of instantaneous screw motion (ISM). By using these invariants, a more generalized and compact formulation of rigid body motion is achieved. The approach helps to describe complex motion behaviors with greater clarity and mathematical efficiency. This framework is applicable to a wide range of mechanical and robotic systems, offering improved insight into motion analysis and control through ISM-based modeling techniques.

Keywords: Instantaneous screw axis, invariant description of motion, inverse problem

Мгновенная ось винтового движения твердого тела

Садуллаева М.З.¹, Абдинабиев Ж.С.², Турдиев С.С.¹

¹Тошкентский государственный университет транспорта, Тошкент,

²Национальный исследовательский университет «ТИАМЭ», Узбекистан

Аннотация: В данной работе исследуется состояние мгновенной оси винта (ISA) во время движения жесткого тела. Также вводится метод изменения представления движения жесткого тела. В работе показано, как параметры поступательного и вращательного движения жесткого тела могут быть выражены как функции инвариантов мгновенного винтового движения (ISM). Использование этих инвариантов позволяет получить более обобщенную и компактную формулировку движения жесткого тела. Этот подход помогает описать сложное поведение движения с большей ясностью и математической эффективностью. Этот подход применим к широкому кругу механических и роботизированных систем, предлагая более глубокое понимание анализа движения и управления с помощью методов моделирования на основе ISM.

Ключевые слова: Мгновенная ось винта, инвариантное описание движения, обратная задача

1. Введение

В отличие от традиционного представления движения в терминах не связанных друг с другом перевода и вращения, Гулио Моцци в 1763 году доказал, что любое общее движение твердого тела может быть описано мгновенной винтовой осью (ISA) [1,2]. Одним из применений концепции ISM в кинематике жесткого тела является инвариантное описание движения жесткого тела, представленное Дж. Шуттером [3]. Дж. Анджелес описал автоматическое вычисление винтовых параметров движения жесткого тела как для конечного, так и для бесконечно удаленного положения [5,6]. Глубокое исследование винтового исчисления и его приложений в механике в терминах векторного анализа представлено в работе [7].

В данной работе состояние ISA будет определяться как функции инвариантов. Кроме того, будет рассмотрена проблема перехода между двумя различными методами определения движения жесткого тела.

2. Обратная задача

Движение жесткого тела может быть описано с помощью шести независимых инвариантов мгновенного винтового движения (ISM) [3]. Выражения для этих шести инвариантов (i_{1-6}) получаются в следующем виде [3]:

$$\begin{aligned} i_1 &= f_1(\omega), i_2 = f_2(\omega, v), i_3 = f_3(\omega, \dot{\omega}), \\ i_4 &= f_4(\omega, \dot{\omega}, v, \dot{v}), i_5 = f_5(\omega, \dot{\omega}, \ddot{\omega}), \\ i_6 &= f_6(\omega, \dot{\omega}, \ddot{\omega}, v, \dot{v}, \ddot{v}), \end{aligned} \quad (2.1)$$

где ω и v - векторы угловой и поступательной скоростей соответственно.

В этом разделе будет рассмотрена обратная задача перехода от инвариантного описания к традиционному описанию движения твердого тела. Традиционные параметры можно записать как функции инвариантов. В зависимости от точки отсчета векторы скорости могут

быть найдены из следующих уравнений:

$$\omega = i_1 \cdot e_x,$$

$$v = i_2 \cdot e_x + p \times (i_1 \cdot e_x),$$

где e_x - единичный вектор, p - вектор, начинающийся из опорной точки и перпендикулярный ISA. Радиус-вектор и угловой вектор будут вычислены с помощью

$$r(t) = \int_{t_0}^t v(t) dt = \int_{t_0}^t i_1(t) \cdot e_x(t) dt,$$

$$\theta(t) = \int_{t_0}^t \omega(t) dt = \int_{t_0}^t [i_2(t) \cdot e_x(t) + p(t) \times (i_1(t) \cdot e_x(t))] dt. \quad (2.2)$$

Переменные в функциях управления могут быть выражены как функции инвариантов с помощью уравнений (2.2), и тогда функция управления будет функцией инвариантов.

3. Движение ISA

Положение ISA можно определить по положению точки, находящейся на ISA, и вектору e_x . Без потери общности была выбрана центральная точка о (см. рис. 1), и ее движение будет рассмотрено ниже. Если положение жесткого тела, углы Эйлера и векторы скоростей определяются как

$$\xi = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, \eta = \begin{bmatrix} \phi \\ \theta \\ \psi \end{bmatrix}, \dot{\xi} = v = \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{bmatrix},$$

$$\omega = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\sin\theta \\ 0 & \cos\phi & \cos\theta\sin\phi \\ 0 & -\sin\phi & \cos\theta\cos\phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix},$$

где x, y, z - координаты опорной точки жесткого тела.

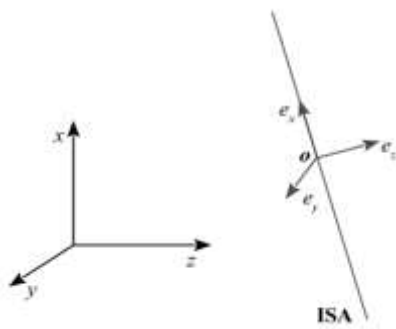


Рис. 1. ISA в декартовой системе координат

Тогда единичные векторы e_x и e_y будут определены следующим образом:

$$e_x = \frac{\omega}{\|\omega\|} = \begin{bmatrix} \frac{(\dot{\phi} - \dot{\psi}\sin\theta)}{\gamma} \\ \frac{(\dot{\theta}\cos\phi + \dot{\psi}\cos\theta\sin\phi)}{\gamma} \\ \frac{(\dot{\psi}\cos\theta\cos\phi - \dot{\theta}\sin\phi)}{\gamma} \end{bmatrix},$$

$$e_y = \frac{\omega \times \dot{\omega}}{\|\omega \times \dot{\omega}\|}, \quad (3.1)$$

Где

$$\gamma = \|\omega\| = \sqrt{\dot{\phi}^2 + \dot{\theta}^2 + \dot{\psi}^2 - 2\dot{\phi}\dot{\psi}\sin\theta},$$

$$\dot{\omega} = [\dot{\omega}_x \quad \dot{\omega}_y \quad \dot{\omega}_z]^T, \quad (3.2)$$

$$\omega_x = \ddot{\phi} - \ddot{\psi}\sin\theta - \dot{\psi}\dot{\theta}\cos\theta,$$

$$\omega_y = \ddot{\theta}\cos\phi - \ddot{\phi}\dot{\theta}\sin\phi + \ddot{\psi}\cos\theta\sin\phi - \dot{\psi}\dot{\theta}\sin\theta\sin\phi + \dot{\phi}\dot{\psi}\cos\theta\cos\phi,$$

$$\omega_z = \ddot{\psi}\cos\theta\cos\phi - \ddot{\psi}\dot{\theta}\sin\theta\cos\phi - \dot{\psi}\dot{\phi}\cos\theta\sin\phi - \dot{\theta}\sin\phi - \dot{\phi}\cos\phi.$$

Положение центральной точки о можно определить через ζ :

$$\zeta = [\hat{x} \quad \hat{y} \quad \hat{z}]^T \quad (3.3)$$

где $\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}$ - координаты о.

Вектор скорости о состоит из двух составляющих скоростей: одна направлена вдоль e_x и ее значение равно i_6 (6-й инвариант), а другая - вдоль e_y и ее значение равно i_4 (4-й инвариант). Таким образом, для движения о можно записать следующее выражение:

$$\zeta = i_6 \cdot e_x + i_4 \cdot e_y, \quad (3.4)$$

где

$$i_4 = e_y \cdot \dot{p},$$

$$i_6 = e_x \cdot \dot{p} - \frac{d}{dt} \frac{(e_x \times e_y) \cdot \dot{p} \cdot \|\omega\|^2}{\|\omega \times \dot{\omega}\|}. \quad (3.5)$$

Уравнение (3.4) - это уравнение движения центральной точки о. Уравнения (3.1) и (3.4) достаточны для определения движения ISA. Теперь ниже рассматриваются выражения i_4 и i_6 как функции управляющих параметров. Согласно второму закону Ньютона

$$m\ddot{r} = F, \quad I\ddot{\theta} = \tau, \quad (3.6)$$

Где F - полная сила, τ - полный момент, m - масса твердого тела, I - матрица инерции. Известно, что

$$F = \frac{dP}{dt}, \quad \tau = \frac{dL}{dt}, \quad (3.7)$$

где P и L - линейный и угловой моменты соответственно.

Уравнения (3.5) приобретают вид

$$i_4 = \mathbf{e}_y \cdot \dot{\mathbf{p}} = \frac{(\hat{\mathbf{L}} \times \hat{\mathbf{r}}) \cdot (\hat{\mathbf{r}} \times \mathbf{P} + \hat{\mathbf{L}} \times \mathbf{F}) \|\hat{\mathbf{L}}\|^2 - 2(\hat{\mathbf{L}} \times \mathbf{P}) \cdot (\hat{\mathbf{L}} \cdot \hat{\mathbf{r}})}{m \|\hat{\mathbf{L}}\|^4},$$

$$i_6 = \frac{\hat{\mathbf{L}} \cdot (\hat{\mathbf{r}} \times \mathbf{P})}{m \|\hat{\mathbf{L}}\|^2} - \frac{d}{dt} \left[\frac{(\hat{\mathbf{L}} \times (\hat{\mathbf{L}} \times \hat{\mathbf{r}})) \cdot (\hat{\mathbf{r}} \times \mathbf{P} + \hat{\mathbf{L}} \times \mathbf{F}) \|\hat{\mathbf{L}}\|^2 - 2(\hat{\mathbf{L}} \times \mathbf{P}) \cdot (\hat{\mathbf{L}} \cdot \hat{\mathbf{r}})}{m \|\hat{\mathbf{L}}\|^3} \right],$$

Где $\hat{\mathbf{L}} = \mathbf{I}^{-1} \mathbf{L}$, $\hat{\mathbf{r}} = \mathbf{I}^{-1} \mathbf{r}$. Если жестким телом является квадрокоптер, то матрица инерции может быть записана как

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} I_x & 0 & 0 \\ 0 & I_y & 0 \\ 0 & 0 & I_z \end{bmatrix}.$$

3. Заключение

В данном исследовании был проведен тщательный анализ движения мгновенной оси винта (ISA) при движении жесткого тела и успешно получены соответствующие уравнения движения. Значительное внимание было уделено формулировке векторов скорости в терминах инвариантов, связанных с мгновенным движением винта (ISM). Взаимосвязи для векторов положения и скорости были получены аналитическим путем, что позволило создать четкую математическую основу для описания движения жесткого тела с использованием принципов ISM. Также было показано, что состояние ISA зависит от 4-го и 6-го инвариантов.

Полученные результаты показывают, что векторы положения и скорости жесткого тела могут быть представлены в явном виде через первый и второй инварианты ISM, что упрощает анализ и улучшает физическое понимание движения. Кроме того, выяснилось, что динамическое состояние и ориентация ISA определяются в основном четвертым и шестым инвариантами. Это позволяет глубже понять роль, которую играют эти инварианты в общей характеристике движения системы. Представленные результаты способствуют разработке более обобщенного и эффективного метода моделирования и анализа движения жесткого тела, особенно в системах, включающих сложные механические взаимодействия или требующих высокой точности, таких как робототехника, биомеханика и аэрокосмические механизмы.

Использованная литература / References

- [1] Mozzi, G., "Discorso Matematico sopra il Rotamento Momentaneo dei Corpi," Stamperia del Donato Campo, Napoli, 1763.
- [2] Ceccarelli, M., 1995, "Screw Axis Defined by Giulio Mozzi in 1763," Ninth World Congress IFToMM, Milano, Italy, pp. 3187–3190.
- [3] Joris De Schutter, "Invariant description of rigid body motion trajectories", Journal of Mechanisms and Robotics, 2010.
- [4] A. P. Markeev, "Theoretical Mechanics (Teoreticheskaya mekhanika)" (in Russian), Moskva Nauka 1990, pp. 63-69.

[5] Jorge Angeles, "Automatic Computation of the Screw Parameters of Rigid-Body Motions. Part I: Finitely-Separated Positions", Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control, 1986, Vol. 108, pp. 32-38.

[6] Jorge Angeles, "Automatic Computation of the Screw Parameters of Rigid-Body Motions. Part II: Infinitesimally-Separated Positions", Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control, 1986, Vol. 108, pp. 39-43.

[7] F. M. Dimentberg, "The screw calculus and its applications in mechanics", Moskva Nauka 1965.

Информация об авторах / Information about the authors

М.З. Садуллаева	Доцент кафедры высшей математики, Ташкентский государственный транспортный университет, Узбекистан E-mail: mavjuda1975m@mail.ru https://orcid.org/0000-0002-6999-3472
Ж.С. Абдинабиев	Кафедра механики и компьютерного моделирования, Национальный исследовательский университет «ТИАМЭ», Узбекистан E-mail: jasur.nuuz@gmail.com https://orcid.org/0000-0002-3708-9614
С.С. Турдиев	Ассистент кафедры высшей математики, Ташкентский государственный транспортный университет, Узбекистан E-mail: s.turdiyev@alumni.nsu.ru https://orcid.org/0000-0003-3599-1716

D. Ibrohimova

*On the geometry of nodal sets of eigenfunctions of fractional powers of the laplace operator.....*305

A. Alimov, E. Aliev

*Leibniz algebras generated using the image of Euclidean algebras.....*308

J. Azimov, N. Namozov

*Analysis of the annual change in the volume of cargo turnover of road transport through the time series model.....*311

D. Eshmamatova, D. Khakimova, S. Zavgorodneva

*Analysis of the dynamics of the viral infection spread model.....*314

Sh. Kasimov, N. Shomurodov

*Propagation of spherical shock waves in a contiguous elastic-plastic environment.....*319

L. Sharipova, H. Raufov

*Time series modeling and prediction.....*322

M. Sadullaeva, J. Abdinabiev, S. Turdiev

*Instantaneous axis of helical motion of a rigid body.....*327

A. Artykbaev, M. Ergashaliev

Method for determining the optimal length of the transition part of a railway track plan330