

ENGINEER



international scientific journal

SPECIAL ISSUE

E-ISSN

3030-3893

ISSN

3060-5172



SLIB.UZ
Scientific Library of Uzbekistan



A bridge between science and innovation



**TOSHKENT DAVLAT
TRANSPORT UNIVERSITETI**

Tashkent state
transport university



ENGINEER

A bridge between science and innovation

E-ISSN: 3030-3893

ISSN: 3060-5172

SPECIAL ISSUE

16-iyun, 2025



engineer.tstu.uz

**“QURILISHDA YASHIL IQTISODIYOT, SUV VA ATROF-MUHITNI ASRASH
TENDENSIYALARI, EKOLOGIK MUAMMOLAR VA INNOVATSION
YECHIMLAR” MAVZUSIDAGI RESPUBLIKA MIQYOSIDAGI
ILMIY-AMALIY KONFERENSIYA
TASHKILIY QO‘MITASI**

1. Abdurahmonov O.K. – O‘zbekiston Respublikasi Prezidenti Administratsiyasi ijtimoiy rivojlantirish departament rahbari, Toshkent davlat transport universiteti rektori
2. Gulamov A.A – Toshkent davlat transport universiteti prorektori
3. Shaumarov S.S – Toshkent davlat transport universiteti prorektori
4. Suvonqulov A.X. – O‘zsuvta’minoti AJ raisi
5. Xamzayev A.X. – O‘zbekiston ekologik partiyasi raisi
6. Maksumov N.E. – O‘zbekiston Respublikasi Vazirlar Mahkamasi huzuridagi Qurilish va uy-joy kommunal xo‘jaligi sohasida nazorat qilish inspeksiyasi boshlig‘i o‘rinbosari
7. Baratov D.X. – Toshkent davlat transport universiteti prorektori
8. Turayev B. X – Toshkent davlat transport universiteti prorektori
9. Norkulov S.T. – Toshkent davlat transport universiteti prorektori
10. Adilxodjayev A.E. – Universitetdagi istiqbolli va strategik vazifalarni amalga oshirish masalalari bo‘yicha rektor maslahatchisi
11. Negmatov S.S. – “Fan va taraqqiyot” DUK ilmiy rahbari, O‘zbekiston Respublikasi Fanlar Akademiyasi Akademigi
12. Abed N.S. – “Fan va taraqqiyot” DUK raisi
13. Merganov A.M – Ilmiy tadqiqotlar, innovatsiyalar va ilmiy-pedagogik kadrlar tayyorlash bo‘limi boshlig‘i
14. Ibadullayev A. – Muhandislik kommunikatsiyalari va tizimlari kafedrasini professori
15. Rizayev A. N. – Muhandislik kommunikatsiyalari va tizimlari kafedrasini professori
16. Xalilova R.X. – Muhandislik kommunikatsiyalari va tizimlari kafedrasini professori
17. Babayev A.R. – “Qurilish muhandisligi” fakulteti dekani
18. Boboxodjayev R.X – Tahririy nashriyot va poligrafiya bo‘limi boshlig‘i
19. Talipov M.M – Ilmiy nashrlar bilan ishlash bo‘limi boshlig‘i
20. Maxamadjonova Sh.I. - Matbuot xizmati kontent-menedjeri
21. Umarov U.V. – Muhandislik kommunikatsiyalari va tizimlari kafedrasini mudiri
22. Eshmamatova D.B. – Oliy matematika kafedrasini mudiri
23. Muxammadiyev N.R. – Bino va sanoat inshootlari qurilishi kafedrasini mudiri
24. Tursunov N.Q. – Materialshunoslik va mashinasozlik kafedrasini mudiri
25. Shermuxammedov U.Z. – Ko‘priklar va tonnellar kafedrasini mudiri
26. Lesov Q.S. – Temir yo‘l muhandisligi kafedrasini mudiri
27. Pirnazarov G‘.F. – Amaliy mexanika kafedrasini mudiri
28. Teshabayeva E.U. – Tabiiy fanlar kafedrasini professori
29. Chorshanbiyev Umar Ravshan o‘g‘li – Muhandislik kommunikatsiyalari va tizimlari kafedrasini dotsent v.b.
30. Obidjonov Axror Jo‘raboy o‘g‘li – Muhandislik kommunikatsiyalari va tizimlari kafedrasini assistenti



Analysis of the dynamics of the viral infection spread model

D.B. Eshmamatova¹, D.A. Khakimova¹, S.Y. Zavgorodneva¹

¹Tashkent state transport university, Tashkent, Uzbekistan

Abstract: This paper analyzes the dynamics of a mathematical model based on a proposed three-dimensional quadratic stochastic operator developed to simulate the spread of viral infections. The model employs Lotka–Volterra-type operators defined on a simplex, and the behavior of the resulting dynamical systems under various signatures is thoroughly investigated. The model variables represent the proportions of population groups—susceptible, infected, recovered, and hidden carriers—while the coefficients denote the interaction parameters among these groups. Within the study, the Jacobian matrix is constructed to identify stationary points and classify their stability properties as attractors, repellers, or neutral points. Additionally, the basic reproduction number is calculated analytically to determine the conditions under which the infection may spread. Using this model, the stages of infectious disease progression, the role of hidden carriers in transmission, and the probability of reinfection are analyzed from a mathematical perspective. The results provide valuable insights into real-world epidemiological dynamics and can support the development of effective disease control strategies.

Keywords: Simplex, the Lotka–Volterra operator, signature, attractor, repeller, saddle, Jacobian, population, epidemiology, dynamic system, infection and spread of disease, carriers.

Анализ динамики модели распространения вирусных инфекций.

Эшмаматова Д.Б.¹, Хакимова Д.А.¹, Завгороднева С.Ю.¹

¹Ташкентский государственный транспортный университет, Ташкент, Узбекистан

Аннотация: В данной статье рассматривается динамика математической модели, построенной на основе предложенного трёхмерного квадратичного стохастического оператора для моделирования распространения вирусных инфекций. В модели используются операторы Лотки–Вольтерры, определённые в симплексе, и проводится углублённый анализ поведения динамических систем при различных сигнатурах. Переменные модели отражают доли популяционных групп: здоровых, инфицированных, выздоровевших и скрытых носителей, а коэффициенты интерпретируются как параметры взаимодействия между этими группами. В рамках исследования построена матрица Якоби, на основе которой определены стационарные точки и классифицированы их свойства как аттракторы, репеллеры или нейтральные точки. Также аналитически вычисляется базовое репродуктивное число и выявляются условия распространения инфекции. С помощью данной модели проводится математический анализ стадий развития инфекционных заболеваний, роли скрытых носителей в эпидемическом процессе, а также вероятности повторного заражения. Полученные результаты могут быть использованы для более глубокого понимания реальных эпидемиологических процессов и разработки эффективных стратегий управления ими.

Ключевые слова: Симплекс, оператор Лотки–Вольтерры, сигнатура, аттрактор, репеллер, седло, Якобиан, популяция, эпидемиология, динамическая система, заражение и распространение болезни, носители.

1. Введение

В последние годы дискретные нелинейные динамические системы приобретают всё большую значимость в математическом моделировании сложных процессов, встречающихся в эпидемиологии, экологии и экономике ([1]–[3]). Несмотря на широкое распространение моделей, основанных на непрерывных системах, дискретные модели обладают уникальными преимуществами при описании и анализе реальных явлений с дискретным характером развития. В настоящем исследовании рассматривается класс

дискретных динамических систем типа Лотки–Вольтерры, действующих на трёхмерном симплексе. Особое внимание уделено исследованию динамики внутренних точек симплекса под воздействием операторов данного класса. Для систематизации и углублённого анализа операторов применяется метод введения сигнатур, что позволяет классифицировать операторы по четырём различным типам и провести для каждого из них подробное исследование динамических свойств. Актуальность работы определяется перспективами применения данных моделей для описания и анализа механизмов распространения



инфекционных заболеваний, передающихся воздушно-капельным путём.

2. Предварительные сведения и методы

Известно [4], [5], что $(m-1)$ -мерным симплексом называется многогранник, определяемый следующим равенством и неравенствами:

$$S^{m-1} = \{x = (x_1, x_2, \dots, x_m) \in R^m: x_i \geq 0, \sum_{i=1}^m x_i = 1\}. \quad (1)$$

Координаты вершин симплекса, определяемого равенством (1), согласно [5] обозначим в следующем виде:

$$e_1(1, 0, \dots, 0), e_2(0, 1, \dots, 0), \dots, e_m(0, 0, \dots, m).$$

Пусть $I = \{1, 2, \dots, m\}$ и $\alpha \subset I$.

Определение 1 [5]. Выпуклая оболочка вершин симплекса e_i , где $i \in \alpha$, называется гранью симплекса S^{m-1} и обозначается через Γ_α .

Если $|\alpha|$ - число элементов множества α , то

$$\Gamma_\alpha = \text{co}\{e_i\}_{i \in \alpha} \text{ и } \dim \Gamma_\alpha = |\alpha| - 1.$$

В работе [5] введен дискретный оператор Лотки-Вольтерры, на который мы будем опираться. Пусть $x = (x_1, x_2, \dots, x_m)$ некоторое распределение вероятностей индивидов по признакам. В предположении, что скрещивания происходят случайным образом (панмиксия) и между различными поколениями не происходит скрещиваний, для описания закона перехода от распределения вероятностей в следующем поколении получим следующую динамическую систему:

$$x_k^{(n+1)} = x_k^{(n)} \left(1 + \sum_{i=1}^m a_{ki} x_i^{(n)} \right), \quad (2)$$

где $k = 1, 2, \dots, m, n = 0, 1, \dots$,

$x^0 = (x_1^0, \dots, x_m^0)$ - распределение вероятностей в начальном поколении, $a_{ki} = -a_{ik}, |a_{ki}| \leq 1$ - коэффициенты наследственности.

Как упоминалось выше, оператор (2) в работах [6]-[9] с невырожденной кососимметрической матрицей рассматривался в качестве оператора динамики популяции. В предлагаемой работе мы рассматриваем этот оператор, действующий в трехмерном симплексе с вырожденной кососимметрической матрицей. Этот оператор анализируем, введя сигнатуру. Рассматриваемый в работе оператор выступает в качестве дискретной компартментарной модели, описывающей эпидемиологическую ситуацию в закрытой популяции. В качестве закрытой популяции мы можем рассматривать произвольный вид транспорта - метро, автобус, поезд, самолет.

3. Результаты и обсуждения.

Пусть частично-ориентированный граф с четырьмя вершинами имеет вид, показанный на рисунке 1.

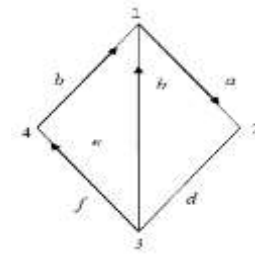


Рис. 1. Частично-ориентированный граф

В работе [10] введено понятие частично-ориентированных графов, поэтому мы в работе повторяться не будем. Также в работах [5]-[9] было показано соответствие полных и частично-ориентированных графов с операторами Лотки-Вольтерры. Этот граф соответствует трёхмерному симплексу. Согласно этим работам, оператор, соответствующий этому графу, имеет вид:

$$V_1: \begin{cases} x'_1 = x_1(1 - ax_2 + bx_3 + cx_4), \\ x'_2 = x_2(1 + ax_1), \\ x'_3 = x_3(1 - bx_1 - fx_4), \\ x'_4 = x_4(1 - ex_1 + fx_3). \end{cases}$$

Согласно [11], решаем уравнение $V_1 x = x$ и находим множество неподвижных точек этого оператора:

$$\begin{cases} x_1 = x_2 = x_3 = 0 \Rightarrow e_1 = \{1; 0; 0; 0\}, \\ x_1 = x_4 = 0 \Rightarrow M\left(0; \frac{b}{a+b}; \frac{a}{a+b}; 0; 0\right), \\ x_1 = x_3 = 0 \Rightarrow N\left(0; \frac{c}{a+c}; 0; \frac{a}{a+c}\right), \end{cases}$$

в итоге множества неподвижных точек оператора V_1 - это рёбра Γ_{23}, Γ_{24} и точки $-e_1, M$. Согласно работе [5], [6] найдём множества P и Q :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -a & b & c \\ a & 0 & 0 & 0 \\ -b & 0 & 0 & -f \\ -e & 0 & f & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \geq 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -ax_2 + bx_3 + cx_4 \geq 0, \\ ax_1 \geq 0, \\ -bx_1 - fx_4 \geq 0 \Rightarrow x_1 = x_4 = 0, \\ -ex_1 + fx_3 \geq 0 \Rightarrow x_1 = x_3 = 0, \end{cases}$$

$$x_3 = 0 \Rightarrow \begin{cases} -ax_2 + cx_4 \geq 0 \\ x_2 + x_4 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -a \cdot (1 - x_4) + cx_4 \geq 0 \\ -ax_2 + c \cdot (1 - x_2) \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -a + ax_4 + cx_4 \geq 0 \\ -ax_2 + c - cx_2 \geq 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_4 \geq \frac{a}{a+c}, \\ x_2 \leq \frac{c}{a+c}, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{a}{a+c} \leq x_4 \leq 1, \\ 0 \leq x_2 \leq \frac{c}{a+c}, \end{cases}$$

В итоге $P = \{x \in S^3: Ax \geq 0\} = \{\Gamma_{34}, M, N\}$.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -a & b & c \\ a & 0 & 0 & 0 \\ -b & 0 & 0 & -f \\ -e & 0 & f & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \leq 0 \Rightarrow$$

$$\begin{cases} -ax_2 + bx_3 + cx_4 \leq 0, \\ ax_1 \leq 0 \Rightarrow x_1 = 0, \\ -bx_1 - fx_4 \leq 0 \Rightarrow bx_1 + fx_4 \geq 0, \\ -ex_1 + fx_3 \leq 0 \Rightarrow x_1 = x_3 = 0, \end{cases}$$

$$x_3 = 0 \Rightarrow \begin{cases} -ax_2 + cx_4 \leq 0, \\ x_2 + x_4 = 1, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -a \cdot (1 - x_4) + cx_4 \leq 0, \\ -ax_2 + c \cdot (1 - x_2) \leq 0, \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -a + ax_4 + cx_4 \leq 0, \\ -ax_2 + c - cx_2 \leq 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_4 \leq \frac{a}{a+c}, \\ x_2 \geq \frac{c}{a+c}, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 \leq x_4 \leq \frac{a}{a+c}, \\ \frac{c}{a+c} \leq x_2 \leq 1, \end{cases}$$

тогда $Q = \{x \in S^3: Ax \leq 0\} = \{F_{12}, M, N\}$.

Согласно [6], известно, что множества P и Q выпуклые непустые многогранники, состоящие из неподвижных точек. Далее анализируя спектр матрицы Якоби выясним характеры неподвижных точек. Для этого решается уравнение $|J(x) - \lambda E| = 0$. В зависимости от значений λ имеем следующее:

- если $\lambda > 1$, то это репеллер;
- если $\lambda < 1$ аттрактор;
- если же $\lambda = 1$ – седловая точка.

Полученное уравнение имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} & a^2 \cdot x_1 \cdot x_2 \cdot (1 - bx_1 - fx_4 - \lambda) \cdot (1 - ex_1 + fx_3 - \lambda) \\ & + (a \cdot f)^2 \cdot x_1 \cdot x_2 \cdot \\ & \cdot x_3 \cdot x_4 + (1 + ax_1 - \lambda) \cdot (1 - ax_2 + bx_3 + cx_4 - \lambda) \\ & \cdot (1 - bx_1 - fx_4 - \lambda) \cdot \\ & \cdot (1 - ex_1 + fx_3 - \lambda) + e^2 \cdot x_1 \cdot x_4 \cdot (1 - bx_1 - fx_4 - \lambda) \\ & \cdot (1 + ax_1 - \lambda) + \\ & + f^2 \cdot x_3 \cdot x_4 \cdot (1 - ax_2 + bx_3 + cx_4 - \lambda) \cdot (1 + ax_1 - \lambda) \\ & + b^2 \cdot x_1 \cdot x_3 \cdot \\ & \cdot (1 - ex_1 + fx_3 - \lambda) \cdot (1 + ax_1 - \lambda) = 0 \end{aligned}$$

Теперь подставив координаты неподвижных точек в это уравнение найдём значения λ .

$$1. \quad e_1 = \{1; 0; 0; 0\} \Rightarrow (1 + a - \lambda) \cdot (1 - \lambda) \cdot (1 - b - \lambda) \cdot (1 - e - \lambda) = 0; \Rightarrow \lambda_1 = 1; \lambda_2 = 1 + a; \lambda_3 = 1 - b; \lambda_4 = 1 - e.$$

Значит вершина e_1 – седловая.

$$2. \quad \text{В точке } M\left(0; \frac{b}{a+b}; \frac{a}{a+b}; 0\right) \in F_{23}: (1 - \lambda) \cdot (1 - ax_2 + bx_3 - \lambda) \cdot (1 - \lambda) \cdot (1 + fx_3 - \lambda) = 0;$$

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1; \lambda_4 = 1 + \frac{af}{a+b}. \text{ Значит } M - \text{репеллер.}$$

$$3. \quad \text{В точке } N\left(0; \frac{c}{a+c}; 0; \frac{a}{a+c}\right) \in F_{24}: (1 - \lambda) \cdot (1 - ax_2 + cx_4 - \lambda) \cdot (1 - fx_4 - \lambda) \cdot (1 - \lambda) = 0;$$

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1; \lambda_4 = 1 - \frac{af}{a+c} \Rightarrow N - \text{аттрактор.}$$

Теперь введем сигнатуры, согласно [9]. Для данного оператора существуют четыре сигнатуры:

$$\delta_1 = (+ + - +), \delta_2 = (+ + - -),$$

$$\delta_3 = (- + - -), \delta_4 = (- + - +).$$

Найдём сечения симплекса, соответствующие этим сигнатурам:

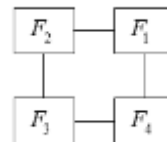
$$F_1 = co\{e_3, e_4, M, N\}, F_2 = co\{e_1, e_4, M, N\},$$

$$F_3 = co\{e_1, e_2, M, N\}, F_4 = co\{e_2, e_3, M, N\}.$$

Напомним определение из [9]:

Определение 2 [9]. Последовательность прохождения траектории через многогранники F_i называется маршрутом траектории.

Согласно этому определению определим маршрут траектории, для этого построим граф смежности, который будет выглядеть следующим образом:



Для определения взаимной направленности этих маршрутов проведём проверку:

$$1. \quad F_2 \cap F_1 = \{e_4; M; N\}:$$

$$\lambda_1 e_4 \{0; 0; 0; 1\} = \{0; 0; 0; \lambda_1\}, \lambda_2 M \left\{0; \frac{b}{a+b}; \frac{a}{a+b}; 0\right\} = \left\{0; \frac{b\lambda_2}{a+b}; \frac{a\lambda_2}{a+b}; 0\right\},$$

$$\lambda_3 N \left\{0; \frac{c}{a+c}; 0; \frac{a}{a+c}\right\} = \left\{0; \frac{c\lambda_3}{a+c}; 0; \frac{a\lambda_3}{a+c}\right\},$$

$$\{F_1 \cap F_2\} = \left\{0; \frac{b\lambda_2}{a+b} + \frac{c\lambda_3}{a+c}; \frac{a\lambda_2}{a+b}; \frac{a\lambda_3}{a+c} + \lambda_1\right\} \in S^3,$$

$$\{0 \leq \lambda_i \leq 1, \sum \lambda_i = 1\}.$$

$$x'_4 = x_4(1 - ex_1 + fx_3) = x_4 \cdot \left(1 + \frac{af\lambda_2}{a+b}\right),$$

$$\begin{aligned} x''_4 &= x'_4(1 - ex'_1 + fx'_3) = \\ &= x'_4(1 - ex_1(1 - ax_2 + bx_3 + cx_4) \\ &\quad + fx_3(1 - bx_1 - fx_4)) = \\ &= x'_4 \left(1 + \frac{af\lambda_2}{a+b} - \frac{a^2 f^2 \lambda_2 \lambda_3}{(a+b)(a+c)} - \frac{af^2 \lambda_1 \lambda_2}{a+b}\right) < x_4. \end{aligned}$$

$$2. \quad F_1 \cap F_4 = \{e_3; M; N\}$$

$$\lambda_1 e_3 \{0; 0; 1; 0\} = \{0; 0; \lambda_1; 0\}, \lambda_2 M \left\{0; \frac{b}{a+b}; \frac{a}{a+b}; 0\right\} = \left\{0; \frac{b\lambda_2}{a+b}; \frac{a\lambda_2}{a+b}; 0\right\},$$

$$\lambda_3 N \left\{0; \frac{c}{a+c}; 0; \frac{a}{a+c}\right\} = \left\{0; \frac{c\lambda_3}{a+c}; 0; \frac{a\lambda_3}{a+c}\right\},$$

$$\{F_1 \cap F_4\} = \left\{0; \frac{b\lambda_2}{a+b} + \frac{c\lambda_3}{a+c}; \frac{a\lambda_2}{a+b} + \lambda_1; \frac{a\lambda_3}{a+c}\right\} \in S^3,$$

$$\{0 \leq \lambda_i \leq 1, \sum \lambda_i = 1\},$$

$$x'_4 = x_4(1 - ex_1 + fx_3) = x_4 \cdot \left(1 + \frac{af\lambda_2}{a+b} + f\lambda_1\right),$$

$$\begin{aligned} x''_4 &= x'_4(1 - ex'_1 + fx'_3) = \\ &= x'_4(1 - ex_1(1 - ax_2 + bx_3 + cx_4) \\ &\quad + fx_3(1 - bx_1 - fx_4)) = \end{aligned}$$

$$= x_4' \left(1 + \frac{af\lambda_2}{a+b} + f\lambda_1 - \frac{a^2f^2\lambda_2\lambda_3}{(a+b)(a+c)} - \frac{af^2\lambda_1\lambda_3}{a+c} \right) < x_4. \quad 3.$$

$$F_4 \cap F_3 = \{e_2; M; N\},$$

$$\lambda_1 e_2 \{0; 1; 0; 0\} = \{0; \lambda_1; 0; 0\},$$

$$\lambda_2 M \left\{ 0; \frac{b}{a+b}; \frac{a}{a+b}; 0 \right\} = \left\{ 0; \frac{b\lambda_2}{a+b}; \frac{a\lambda_2}{a+b}; 0 \right\},$$

$$\lambda_3 N \left\{ 0; \frac{c}{a+c}; 0; \frac{a}{a+c} \right\} = \left\{ 0; \frac{c\lambda_3}{a+c}; 0; \frac{a\lambda_3}{a+c} \right\},$$

$$\{F_4 \cap F_3\} = \left\{ 0; \frac{b\lambda_2}{a+b} + \frac{c\lambda_3}{a+c}; \lambda_1; \frac{a\lambda_2}{a+b}; \frac{a\lambda_3}{a+c} \right\} \in S^3,$$

$$\{0 \leq \lambda_i \leq 1, \sum \lambda_i = 1\}.$$

$$x_4' = x_4(1 - ex_1 + fx_3) = x_4 \cdot \left(1 + \frac{af\lambda_2}{a+b} \right),$$

$$x_4'' = x_4'(1 - ex_1' + fx_3') =$$

$$= x_4'(1 - ex_1(1 - ax_2 + bx_3 + cx_4) + fx_3(1 - bx_1 - fx_4)) =$$

$$= x_4' \left(1 + \frac{af\lambda_2}{a+b} - \frac{a^2f^2\lambda_2\lambda_3}{(a+b)(a+c)} \right) < x_4. \quad 4. \quad F_3 \cap F_2 = \{e_1; M; N\},$$

$$\lambda_1 e_1 \{1; 0; 0; 0\} = \{\lambda_1; 0; 0; 0\},$$

$$\lambda_2 M \left\{ 0; \frac{b}{a+b}; \frac{a}{a+b}; 0 \right\} = \left\{ 0; \frac{b\lambda_2}{a+b}; \frac{a\lambda_2}{a+b}; 0 \right\},$$

$$\lambda_3 N \left\{ 0; \frac{c}{a+c}; 0; \frac{a}{a+c} \right\} = \left\{ 0; \frac{c\lambda_3}{a+c}; 0; \frac{a\lambda_3}{a+c} \right\},$$

$$\{F_4 \cap F_3\} = \left\{ \lambda_1; \frac{b\lambda_2}{a+b} + \frac{c\lambda_3}{a+c}; \frac{a\lambda_2}{a+b}; \frac{a\lambda_3}{a+c} \right\} \in S^3, \{0 \leq \lambda_i \leq 1, \sum \lambda_i = 1\}.$$

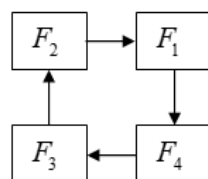
$$x_4' = x_4(1 - ex_1 + fx_3) = x_4 \cdot \left(1 - e\lambda_1 + \frac{af\lambda_2}{a+b} \right),$$

$$x_4'' = x_4'(1 - ex_1' + fx_3') =$$

$$= x_4'(1 - ex_1(1 - ax_2 + bx_3 + cx_4) + fx_3(1 - bx_1 - fx_4)) =$$

$$= x_4' \left(1 - e\lambda_1 + \frac{af\lambda_2}{a+b} - \frac{abf\lambda_1\lambda_2}{a+b} - \frac{a^2f^2\lambda_2\lambda_3}{(a+b)(a+c)} \right) < x_4.$$

В результате проверки взаимная направленность этих маршрутов оказалась следующей:



4. Эпидемиологическая интерпретация динамической системы и результатов.

Опишем эпидемиологическую интерпретацию каждого уравнения динамической системы V_1 .

Начнём работу с объяснения первого члена x_1 , описывающий восприимчивую часть популяции:

$$1. \quad x_1' = x_1(1 - ax_2 + bx_3 + cx_4).$$

Базовый рост популяций x_1 с коэффициентом 1.

Уменьшается за счёт контакта с инфицированными x_2 . Произведение ax_1x_2 означает передачу инфекции.

Увеличивается за счёт выздоровевших x_3 . Это может быть ре-популяцией, т.е. феномен увеличения численности определённого типа организмов, после

катастрофического сокращения их количества – помощь выздоровевших – bx_1x_3 .

Также здесь возможно увеличение за счёт латентных/носителей x_4 . Здесь контакт не приводит к заболеванию, но способствует росту. Примером может быть источники информации или же привитые – cx_1x_4 .

2. $x_2' = x_2(1 + ax_1)$ – группа инфицированной части популяции.

Инфицированная часть популяции увеличивается за счёт контакта с восприимчивыми x_1 . Это будет эпидемическим всплеском.

3. $x_3' = x_3(1 - bx_1 - fx_4)$ – выздоровевшая часть популяции:

Выздоровевшие теряют численность из-за повторного заражения от x_1 . Если x_1 – ещё не полностью здоровые, тогда они являются всё ещё опасными.

Также эта группа теряет численность из-за воздействия носителей x_4 . Это возможно, если иммунитет не устойчив.

4. $x_4' = x_4(1 - ex_1 + fx_3)$ – группа носителей инфекции, латентные.

Группа носителей уменьшается под воздействием здоровых. Это может быть изоляция или же лечение.

Увеличиваются за счёт выздоровевших – если есть возможность рецидива или перехода в носительство.

Яснее сказать динамическая система V_1 описывает взаимодействие субпопуляций, отражающие:

заражение и распространение болезни (через x_1 и x_2);

восстановление или же иммунитет (через x_3); возможные скрытые/латентные носители инфекции (через x_4);

взаимодействие между группами (через коэффициенты a, b, c, e, f).

Теперь как в непрерывном случае определим базовое репродуктивное число, R_0 , который является ключевым эпидемиологическим параметром, характеризующий среднее число вторичных случаев, вызванных одним инфицированным индивидом в полностью восприимчивой популяции. Его можно оценить по системе уравнений, используя подход матрицы следующего поколения или упрощённый анализ линейной части системы вблизи начальной фазы эпидемии.

Этапы поиска R_0 .

Определим инфекционные переменные.

Инфекционные: x_2 (инфицированные), x_4 – (латентные/носители).

Неинфекционные: x_1 (восприимчивые), x_3 (выздоровевшие/иммунные).

Линеаризуем уравнение по x_2 и x_4 при $x_1 \approx 1$,

$x_2, x_4 \approx 0$. Это начальная стадия эпидемии.

$$x_2' = x_2(1 + ax_1) \approx x_2(1 + a),$$

$$x_4' = x_4(1 - ex_1 + fx_3) \approx x_4(1 - e).$$

Это мультипликативный рост. Если коэффициент перед x_i больше 1, x_i растёт экспоненциально.

Оценка R_0 :

Для простой системы, где заражение происходит только от одного класса (например x_2) и в начале эпидемии восприимчивые почти равны 1, тогда:

$$R_0 \approx (\text{скорость заражения}) \times$$

× (средняя продолжительность инфекции).

Из уравнения для x_2 имеем:

$$x_2' = x_2(1 + ax_1) \Rightarrow \text{темпы роста} \sim 1 + a.$$

Значит, если мы примем продолжительность инфекции за нормированную единицу, то:

$$R_0 = 1 + a.$$

Если дополнительно учесть вклад латентных носителей x_4 , которые могут передавать инфекцию или же влиять на распространение через коэффициент f , тогда может быть комбинированное репродуктивное число R_0 , состоящее из вкладов от x_2 и x_4 .

Тогда можем записать:

$$R_0 \approx (1 + a) + \theta(f, e),$$

где $\theta(f, e)$ - вклад латентных, т.е. если они могут снова заражать или же активизироваться.

В заключении мы можем сказать, что в приближении начальной стадии эпидемии, базовое репродуктивное число приблизительно равно:

$$R_0 \approx 1 + a$$

или, при включении вклада от носителей x_4 :

$$R_0 \approx 1 + a + \text{вклад от } f \text{ и } e.$$

5. Заключение

В работе рассмотрели дискретную динамическую систему Лотки-Вольтерры, действующую в $X_t = \beta_0 + \beta_1 X_{t-1} + \beta_2 X_{t-2} + \dots + \beta_{t-k} X_k + \varepsilon_t$ с вырожденной кососимметрической матрицей. В работе показали, что с помощью такого типа системы можно моделировать **выпрыски, устойчивые состояния, циклы вирусных болезней. Это может служить основой для анализа устойчивости, анализа репродуктивного числа, воздействия вакцинации и других вмешательств.**

Использованная литература / References

- [1] Barwell A.D. Limit Sets of Discrete Dynamical Systems // A thesis of doctor of Philosophy, The University of Birmingham. — 2010.
- [2] Murray J. D. Mathematical Biology, 3rd ed. Springer, New York, 2007.
- [3] Brauer F. and Castillo-Chavez C. Mathematical Models in Population Biology and Epidemiology. Springer, New York, 2012.
- [4] Болтянский В.Г. Оптимальное управление дискретными системами. — М.: Наука, 1973. С. 448.
- [5] Ganikhodzhaev R.N., Eshmamatova D.B. Quadratic automorphisms of a simplex and the asymptotic behavior of their trajectories., 2006.
- [6] Tadzhieva M. A., Eshmamatova D. B. and Ganikhodzhaev R. N. "Volterra-type quadratic stochastic

operators with a homogeneous tournament," J. Math. Sci. 278, 546–556. 2024.

[7] Eshmamatova D. B., Ganikhodzhaev R. N., and Tadzhieva M. A. "Dynamics of Lotka–Volterra quadratic mappings with degenerate skew-symmetric matrix," UzbekMath. J. 66, 85–97. 2022.

[8] Seytov Sh. J. and Eshmamatova D. B. "Discrete dynamical systems of Lotka–Volterra and their applications on the modeling of the biogen cycle in ecosystem." Lobachevskii J.Math. 44, 1462–1476. 2023.

[9] Eshmamatova D. B., Tadzhieva M. A. and Ganikhodzhaev R. N. "Criteria for the existence of internal fixed points of Lotka–Volterra quadratic stochastic mappings with homogeneous tournaments acting in an $(m - 1)$ -dimensional simplex," J. Appl. Nonlin. Dyn. 12, 679–688. 2023.

[10] Moon J.W. Topics on Tournaments. New York: Holt, Rinehart and Winston. 112 p. 2013.

[11] R. L. Devaney, A First Course in Chaotic Dynamical Systems: Theory and Experiment. Taylor and Francis, 2020.

Информация об авторах/ Information about the authors

Эшмаматова Дилфуза Бахрамовна заведующая кафедрой высшей математики, доктор физико-математических наук (DSc), Ташкентский государственный транспортный университет.

E-mail: 24dil@mail.ru
<https://orcid.org/0000-0002-1096-2751>

Хакимова Дильдора Абдиганпоровна докторант (PhD) Ташкентского государственного транспортного университета.

E-mail: xakimovadildora47@gmail.com
<https://orcid.org/0000-0001-5181-7182>

Завгороднева Светлана Юрьевна ассистент кафедры высшей математики Ташкентского государственного транспортного университета.

E-mail: zavgorodnevasveta22@gmail.com
<https://orcid.org/0009-0002-7852-7403>

D. Ibrohimova

*On the geometry of nodal sets of eigenfunctions of fractional powers of the laplace operator.....*305

A. Alimov, E. Aliev

*Leibniz algebras generated using the image of Euclidean algebras.....*308

J. Azimov, N. Namozov

*Analysis of the annual change in the volume of cargo turnover of road transport through the time series model.....*311

D. Eshmamatova, D. Khakimova, S. Zavgorodneva

*Analysis of the dynamics of the viral infection spread model.....*314

Sh. Kasimov, N. Shomurodov

*Propagation of spherical shock waves in a contiguous elastic-plastic environment.....*319

L. Sharipova, H. Raufov

*Time series modeling and prediction.....*322

M. Sadullaeva, J. Abdinabiev, S. Turdiev

*Instantaneous axis of helical motion of a rigid body.....*327

A. Artykbaev, M. Ergashaliev

Method for determining the optimal length of the transition part of a railway track plan330