ENGINEER

international scientific journal

SPECIAL ISSUE
E-ISSN
3030-3893
ISSN
3060-5172

SLIB.UZ
Scientific library of Uzbekistan

A bridge between science and innovation

TOSHKENT DAVLAT TRANSPORT UNIVERSITETI
Tashkent state transport university

ENGINEER

A bridge between science and innovation

E-ISSN: 3030-3893

ISSN: 3060-5172

SPECIAL ISSUE

16-iyun, 2025

engineer.tstu.uz

"QURILISHDA YASHIL IQTISODIYOT, SUV VA ATROF-MUHITNI ASRASH TENDENSIYALARI, EKOLOGIK MUAMMOLAR VA INNOVATSION YECHIMLAR" MAVZUSIDAGI RESPUBLIKA MIQYOSIDAGI ILMIY-AMALIY KONFERENSIYA TASHKILIY QO'MITASI

1. Abdurahmonov O.K. – O'zbekiston Respublikasi Prezidenti Administratsiyasi ijtimoiy rivojlantirish departament rahbari, Toshkent davlat transport universiteti rektori
2. Gulamov A.A – Toshkent davlat transport universiteti prorektori
3. Shaumarov S.S – Toshkent davlat transport universiteti prorektori
4. Suvonqulov A.X. – O'zsuvta'minoti AJ raisi
5. Xamzayev A.X. – O'zbekiston ekologik partiyasi raisi
6. Maksumov N.E. – O'zbekiston Respublikasi Vazirlar Mahkamasi huzuridagi Qurilish va uy-joy kommunal xo'jaligi sohasida nazorat qilish inspeksiyasi boshlig'i o'rinbosari
7. Baratov D.X. – Toshkent davlat transport universiteti prorektori
8. Turayev B. X – Toshkent davlat transport universiteti prorektori
9. Norkulov S.T. – Toshkent davlat transport universiteti prorektori
10. Adilxodjayev A.E. – Universitetdagi istiqbolli va strategik vazifalarni amalga oshirish masalalari bo'yicha rektor maslahatchisi
11. Negmatov S.S. – "Fan va taraqqiyot" DUK ilmiy rahbari, O'zbekiston Respublikasi Fanlar Akademiyasi Akademigi
12. Abed N.S. – "Fan va taraqqiyot" DUK raisi
13. Merganov A.M – Ilmiy tadqiqotlar, innovatsiyalar va ilmiy-pedagogik kadrlar tayyorlash bo'limi boshlig'i
14. Ibadullayev A. – Muhandislik kommunikatsiyalari va tizimlari kafedrasi professori
15. Rizayev A. N. – Muhandislik kommunikatsiyalari va tizimlari kafedrasi professori
16. Xalilova R.X. – Muhandislik kommunikatsiyalari va tizimlari kafedrasi professori
17. Babayev A.R. – "Qurilish muhandisligi" fakulteti dekani
18. Boboxodjayev R.X – Tahririy nashriyot va poligrafiya bo'limi boshlig'i
19. Talipov M.M – Ilmiy nashrlar bilan ishlash bo'limi boshlig'i
20. Maxamadjonova Sh.I. - Matbuot xizmati kontent-menedjeri
21. Umarov U.V. – Muhandislik kommunikatsiyalari va tizimlari kafedrasi mudiri
22. Eshmamatova D.B. – Oliy matematika kafedrasi mudiri
23. Muxammadiyev N.R. – Bino va sanoat inshootlari qurilishi kafedrasi mudiri
24. Tursunov N.Q. – Materialshunoslik va mashinasozlik kafedrasi mudiri
25. Shermuxammedov U.Z. – Ko'priklar va tonnellar kafedrasi mudiri
26. Lesov Q.S. – Temir yo'l muhandisligi kafedrasi mudiri
27. Pirnazarov G'.F. – Amaliy mexanika kafedrasi mudiri
28. Teshabayeva E.U. – Tabiiy fanlar kafedrasi professori
29. Chorshanbiyev Umar Ravshan o'g'li – Muhandislik kommunikatsiyalari va tizimlari kafedrasi dotsent v.b.
30. Obidjonov Axror Jo'raboy o'g'li – Muhandislik kommunikatsiyalari va tizimlari kafedrasi assistenti

On the geometry of nodal sets of eigenfunctions of fractional powers of the laplace operator

D. Ibrohimova[1]
[1]Tashkent state transport university, Tashkent, Uzbekistan

Abstract: This work studies the geometric properties of eigenfunctions of fractional powers of the self-adjoint Laplace operator. The sturucture of nodal domains bounded by nodal surfaces, on which the eigenfunction vanishes, is investigated. The behavior of these nodal domains is analyzed depending on the eigenvalue. The paper derives estimates showing that the width of the nodal domain decreases as the eigenvalue increases. From these estimates, it follows that the width of the nodal domain tends to zero as the eigenvalue increases.
Keywords: Laplace operator, eigenfunctions, spectral decomposition, nodal sets of eigenfunctions

---

О геометрии узловых множеств собственных функций дробных степеней оператора лапласа

Ибрагимова Д.[1]
[1]Ташкентский государственный транспортный университет, Ташкент, Узбекистан

Аннотация: В работе изучаются геометрические свойства собственных функций дробных степеней самосопряжённого оператора Лапласа. Исследуется структура узловых областей, ограниченных узловыми поверхностями, т. е. поверхностями, на которых собственная функция обращается в нуль. В работе получена оценка ширины узловой области в зависимости от собственного значения. Из этой оценки следует, что с увеличением собственного значения ширина узловой области стремится к нулю.
Ключевые слова: Оператора Лапласа, собственные функции, спектральные разложение, узловые множества собственных функции.

1. Введение

Изучение геометрии узлов собственных функций эллиптических дифференциальных операторов является одной из актуальных проблем. Особенность узлов собственных функций оператора Лапласа впервые обнаружил немецкий математик изучал Э. Ф.Хладни. Он насыпал частицы песка на колеблющуюся металлическую пластину и систематически изучал их положение. Л. Рэлей в своем классическом труде «Теория звука» показал, что узлы собственных функции изменяются в зависимости от формы областей. [1]. В данной работе исследуется геометрическа свойства собственных функции оператора Лапласа.

2. Метод

В данной работе применена метод Ильина В. А и Алимова Ш.А. Основной метод базируется формулы среднего значения для собственных функции.

Рассмотрим в $\Omega \subset R^n$ области произвольно-положительные, определенные, самосопряженное расширение оператора A Лапласа $-\Delta$. Спектральное разложение оператора A имеет вид

$$A = \int_0^\infty \lambda dE_\lambda.$$

Согласно теореме Л.Гординга [3], оператор разложения единицы E_λявляется интегральным:

$$E_\lambda f(x) = \int_\Omega \theta(x, y, \lambda) f(y) dy.$$

Ядро $\theta(x, y, \lambda)$ данного оператора, которое называются спектральной функцией оператора A, может быть продифференцировано по некоторой спектральной мере $\rho(\lambda)$, т.е. представимо в виде

$$\theta(x, y, \lambda) = \int_0^\lambda \eta(x, y, t)\, d\rho(t).$$

Плотность спектральной функции $\eta(x, y, \lambda)$ разлагается в билинейный ряд

$$\eta(x, y, \lambda) = \sum_{k=1}^{m_\lambda} w_k(x, \lambda)\, w_k(y, \lambda),$$

с некоторой кратностью $m_\lambda \leq +\infty$. Каждая обобщённая собственная функция $w_k(x, \lambda)$ удовлетворяет уравнению

$$Aw_k(x, \lambda) = \lambda\, w_k(x, \lambda).$$

С физической точки зрения собственная функция, принадлежащая $L_2(\Omega)$, описывает связанное состояние системы, а соответствующее собственное значение является энергией данного связанного состояния. Если же обобщённая собственная функция не принадлежит $L_2(\Omega)$, то она соответствует резонансу [1].

Формула среднего значения для собственных функций оператора Лапласа. Пусть функция $\vartheta(x,\lambda)$ является произвольным решением уравнения Лапласа

$$\Delta\vartheta(x,\lambda)+\lambda\vartheta(x,\lambda)=0. \quad (1)$$

Тогда имеет место следующая формула среднего значения

$$\int_\theta \vartheta(x+r\theta,\lambda)dx = \quad (2)$$

$$=(2\pi)^{n/2}\vartheta(x,\lambda)(r\sqrt{\lambda})^{1-n/2}J_{n/2-1}(r\sqrt{\lambda}))$$

где $J_\nu(z)$функция Бесселя порядка ν, интеграл, стоящий в правой части равенства (2) от функции $\vartheta(x,\lambda)$ по единичной сфере. Формула (2) называется формулой среднего значения функции $\vartheta(x,\lambda)$ в точке x. Эта формула доказана в книге [2]

Узловые множества собственных функций оператора Лапласа

Определение. Множество $N_\lambda=\{x\in\Omega: \vartheta(x,\lambda)=0\}$ называется узловым множеством функции $\vartheta(x,\lambda)$. Фиксируем число λ и рассмотрим произвольную собственную функцию отвечающую собственной функции $\vartheta(x,\lambda)$. Пусть N_λсоответствующее узловое множество. Тогда узловое множество N_λразбивает область Ωна несколько частей. Мы обозначим через m_λчисло этих частей. В каждой этой части функция $\vartheta(x,\lambda)$ сохраняет свой знак. Ясно, что с увеличением значения λ, значения m_λтоже увеличивается. **Теорема** (Куранта [4]). *n -я собственная функция может иметь не более n узловых узловых областей*. Формула (2) позволяет определить распределение узловых множеств N_λ по областям Ω. Пусть $x\in\Omega_\lambda=\Omega\backslash N_\lambda$. Тогда существуют окрестности точки xтакие, что $B(x,r)\subset\Omega_\lambda$. Для доказательства этого утверждения воспользуемся формулой Вебера (2). Пусть в точке функция $\vartheta(x,\lambda)>0$. Пусть ρ_n- наименьший положительный корень уравнения

$$J_{n/2-1}(\rho)=0,$$

где $J_\nu(z)$- функция Бесселя ν −порядка.

Выберем число $r_0>0$ так, чтобы $r_0\sqrt{\lambda}<\rho$. Так что функция $J_{n/2-1}(r\sqrt{\lambda})>0$ при любом значении $0<r<r_0$. В таком случае из (2) следует, что при любом

$$\int_\theta \vartheta(x+r\theta,\lambda)dx>0.$$

Тогда

$$\int_{|y-x|<r}^{\int}\vartheta(y,\lambda)\,dy=\int_0^r\tau^{N-1}\left(\int_\theta\vartheta(x+\tau\theta,\lambda)d\theta\right)d\tau.$$

Из непрерывности функции $\vartheta(x,\lambda)$ при малых значениях $r>0$ существует хотя бы одна точка y, $y\in B(x,r)$ в которой $\vartheta(y,\lambda)>0$.

Для любого $\alpha>0$определим оператор

$$A^\alpha=\int_0^\infty\lambda^\alpha\,dE_\lambda.$$

Так как

$$A^\alpha w_k(x,\lambda)=\lambda^\alpha w_k(x,\lambda), \quad (3)$$

То обобщённые собственные функции

$$u_k(x,\lambda)=w_k(x,\lambda^{1/\alpha}).$$

При этом выполняется равенство

$$A^\alpha u_k(x,\lambda)=\lambda u_k(x,\lambda). \quad (4)$$

В настоящей главе изучаются геометрические свойства узловых областей собственных функций оператора A^α.

Основным результатом данной работы является следующая теорема.

Теорема. *Узловые области собственной функции $u(x,\lambda)$ оператора A^α не могут содержать шар радиуса $R>\rho_n\lambda^{-\frac{1}{2\alpha}}$.*

Доказательство. Предположим, что найдется шар $B(x,R)$, где $R>\rho_n\lambda^{-\frac{1}{2\alpha}}$, лежащий целиком внутри некоторой узловой области собственной функции $u_k(x,\lambda)$, в которой эта функция положительна.

Тогда шар $B(x,r)$где $r=\rho_n\lambda^{-\frac{1}{2\alpha}}$, лежит строго внутри данной узловой области.

По формуле Вебера

$$\int_\phi u_k(x+r\theta,\lambda)\,d\phi ==$$

$$u_k(x,\lambda)(2\pi)^{n/2}(r\lambda^{1/(2\alpha)})J_{n/2-1}(r\lambda^{1/(2\alpha)}). \quad (5)$$

Из выбора r следует, что правая часть равна нулю. Но это противоречит тому, что интеграл в левой части положителен.

Замечание. И теоремы 1 следует, что с увеличением спектрального параметра узловые области приобретают вид узких полос, ширина которых, независимо от их числа, стремится к нулю.

3. Вывод

Изучение геометрии узлов собственных функций имеет большое применение при решении задач математической физики. Это позволяет проводить глубокий анализ явлений распространения волн и диффузии.

Блогадарность. Автор благодарен академику Ш. А. Алимову за руководство работой.

Использованная литература / References

[1] Якобсон Д., Надирашвили Н. С., Тот Д., Геометрические свойства собственных функций, УМН, 2001, Т 56, № 6 (342), 67–88

[2] Ильин В. А. Спектральная теория дифферен-циальных операторов. М., 1990.

[3] Гординг Л. Разложения по собственным функциям, связанные с эллиптическими дифференциальными операторами // 12 Congr. Math. Scan. Lund.-1953.-pp.44-45. («Математика», сб. переводов. 1957. №1(3). С.107-116).

[4] Courant R, Hilbert D., Methods of Mathematical Physics. V. I. New York: Interscience Publ., 1953.

Информация об авторах/ Information about the authors

Ибрагимова Дильбар	Ассистент, Ташкентский государственный транспортный университет E-mail: dilbaralikulova1997@mail.ru https://orcid.org/0009-0008-6590-9035

CONTEXT / MUNDARIJA

ENGINEER