# ENGINEER

international scientific journal

SPECIAL ISSUE

E-ISSN
3030-3893

ISSN
3060-5172

SLIB.UZ
Scientific library of Uzbekistan

A bridge between science and innovation

TOSHKENT DAVLAT TRANSPORT UNIVERSITETI
Tashkent state transport university

# ENGINEER

A bridge between science and innovation

E-ISSN: 3030-3893

ISSN: 3060-5172

SPECIAL ISSUE

16-iyun, 2025

engineer.tstu.uz

# "QURILISHDA YASHIL IQTISODIYOT, SUV VA ATROF-MUHITNI ASRASH TENDENSIYALARI, EKOLOGIK MUAMMOLAR VA INNOVATSION YECHIMLAR" MAVZUSIDAGI RESPUBLIKA MIQYOSIDAGI ILMIY-AMALIY KONFERENSIYA TASHKILIY QO'MITASI

1. Abdurahmonov O.K. – O'zbekiston Respublikasi Prezidenti Administratsiyasi ijtimoiy rivojlantirish departament rahbari, Toshkent davlat transport universiteti rektori
2. Gulamov A.A – Toshkent davlat transport universiteti prorektori
3. Shaumarov S.S – Toshkent davlat transport universiteti prorektori
4. Suvonqulov A.X. – O'zsuvta'minoti AJ raisi
5. Xamzayev A.X. – O'zbekiston ekologik partiyasi raisi
6. Maksumov N.E. – O'zbekiston Respublikasi Vazirlar Mahkamasi huzuridagi Qurilish va uy-joy kommunal xo'jaligi sohasida nazorat qilish inspeksiyasi boshlig'i o'rinbosari
7. Baratov D.X. – Toshkent davlat transport universiteti prorektori
8. Turayev B. X – Toshkent davlat transport universiteti prorektori
9. Norkulov S.T. – Toshkent davlat transport universiteti prorektori
10. Adilxodjayev A.E. – Universitetdagi istiqbolli va strategik vazifalarni amalga oshirish masalalari bo'yicha rektor maslahatchisi
11. Negmatov S.S. – "Fan va taraqqiyot" DUK ilmiy rahbari, O'zbekiston Respublikasi Fanlar Akademiyasi Akademigi
12. Abed N.S. – "Fan va taraqqiyot" DUK raisi
13. Merganov A.M – Ilmiy tadqiqotlar, innovatsiyalar va ilmiy-pedagogik kadrlar tayyorlash bo'limi boshlig'i
14. Ibadullayev A. – Muhandislik kommunikatsiyalari va tizimlari kafedrasi professori
15. Rizayev A. N. – Muhandislik kommunikatsiyalari va tizimlari kafedrasi professori
16. Xalilova R.X. – Muhandislik kommunikatsiyalari va tizimlari kafedrasi professori
17. Babayev A.R. – "Qurilish muhandisligi" fakulteti dekani
18. Boboxodjayev R.X – Tahririy nashriyot va poligrafiya bo'limi boshlig'i
19. Talipov M.M – Ilmiy nashrlar bilan ishlash bo'limi boshlig'i
20. Maxamadjonova Sh.I. - Matbuot xizmati kontent-menedjeri
21. Umarov U.V. – Muhandislik kommunikatsiyalari va tizimlari kafedrasi mudiri
22. Eshmamatova D.B. – Oliy matematika kafedrasi mudiri
23. Muxammadiyev N.R. – Bino va sanoat inshootlari qurilishi kafedrasi mudiri
24. Tursunov N.Q. – Materialshunoslik va mashinasozlik kafedrasi mudiri
25. Shermuxammedov U.Z. – Ko'priklar va tonnellar kafedrasi mudiri
26. Lesov Q.S. – Temir yo'l muhandisligi kafedrasi mudiri
27. Pirnazarov G'.F. – Amaliy mexanika kafedrasi mudiri
28. Teshabayeva E.U. – Tabiiy fanlar kafedrasi professori
29. Chorshanbiyev Umar Ravshan o'g'li – Muhandislik kommunikatsiyalari va tizimlari kafedrasi dotsent v.b.
30. Obidjonov Axror Jo'raboy o'g'li – Muhandislik kommunikatsiyalari va tizimlari kafedrasi assistenti

# About some application of the Rademacher function

**A.A. Eshkabilov[1], A.T. Turaev[1]**
[1]Tashkent state transport university, Tashkent, Uzbekistan

Abstract: The paper details the process of generalizing the classical Viyet formula expressed as infinite products of the number using Rademacher functions. This study presents the mathematical foundations of Rademacher functions and their application to the Viyet formula, which led to various forms of the number expressed as infinite products. These products have not been previously identified or have been insufficiently investigated in previous scientific works. The approaches proposed in the paper open the possibility of identifying new, previously unknown forms of infinite products.
Keywords: innovation, engineering education, quality of education, university competitiveness.

# О некотором приложении функции Радемахера

**Эшкабилов А.А.[1], Тураев А.Т.[1]**
[1]Ташкентский государственный транспортный университет, Ташкент, Узбекистан

Аннотация: В статье подробно рассматривается процесс обобщения классической формулы Viyet, выраженной в виде бесконечных произведений числа , с использованием функций Радемахера. В этом исследовании представлены математические основы функций Радемахера и их применение к формуле Viyet, что привело к получению различных форм числа , выраженных в виде бесконечных произведений. Эти произведения ранее не были идентифицированы или недостаточно исследованы в предыдущих научных работах. Предложенные в статье подходы открывают возможность выявления новых, ранее неизвестных форм бесконечных произведений.
Ключевые слова: Функции Радемахера, обобщение формулы Viyet, бесконечные произведения, число

## 1. Введение

В середине XVII века, в своей классической работе "Opera mathematika.... Luqduni Dfifvorum Виете получил удивительную формулу, в последствии сделавшую его - юриста по профессии, знаменитым среди математиков, даже и сегодняшний день.

В работе [1], Виете рассматривает квадрат, вписанный в единичный круг, площадь которого, равна:

$$S_1 = 2$$

Затем, Виете увеличивает число сторон квадрата и получает правильный восьмисторонник, вписанный в единичный круг.

Его площадь равна:

$$S_2 = 2\sqrt{2}$$

В третьем шагу он образует вписанный в единичный круг правильный шестнадцати сторонник, площадь которого равна:

$$S_3 = 2^2\sqrt{2-\sqrt{2}}$$

Такой процесс он продолжает до бесконечности и рассматривает следующее конечное произведение:

$$\frac{S_1}{S_{n+1}} = \frac{S_1}{S_2}\cdot\frac{S_2}{S_3}\cdot\frac{S_3}{S_4}\cdot\ldots\cdot\frac{S_n}{S_{n+1}},$$

которое после освобождения от иррациональностей в знаменателях, равно:

$$\frac{S_1}{S_{n+1}} = \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{2}\cdot\ldots$$

Переходя в этом равенстве к переду при $n\to\infty$ и учитывая, что $\lim\limits_{n\to\infty} S_{n+1} = \pi$, он получает впервые, сделавшее его знаменитым, выражение иррационального числа $\pi$ через бесконечное произведение:

$$\frac{2}{\pi} = \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{2}\cdot\ldots$$

В этой работе мы, пользуясь системами функций Радемахера, получим эту и ещё несколько представлений иррационального числа $\frac{2}{\pi}$ в виде бесконечного произведения. Итак, рассмотрим двоичное, троичное, ..., $p$ - ичное разложение числа $t, 0\le t\le 1$:

$$t = \frac{\varepsilon_1(t)}{2} + \frac{\varepsilon_2(t)}{2^2} + \ldots + \frac{\varepsilon_n(t)}{2^n} + \ldots$$

(двоичное разложение числа $t$) (1)

$$t = \frac{\sigma_1(t)}{3} + \frac{\sigma_2(t)}{3^2} + \ldots + \frac{\sigma_n(t)}{3^n} + \ldots$$

(троичное разложение числа $t$) (2)

$$t = \frac{\tau_1(t)}{p} + \frac{\tau_2(t)}{p^2} + \ldots + \frac{\tau_n(t)}{p^n} + \ldots$$

($p$ - ичное разложение числа $t$) (3)

Чтобы обеспечить единственность разложения, мы условимся из двух разложений $p$ - ично рациональных точек $(p = 2,3,\dots)$ выбрать то, в котором начиная с некоторой, все функции суть $\tau_k(t) = 0$. Например, в случае $p = 2$ из двух

$$\frac{5}{8} = \frac{1}{2} + \frac{0}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{0}{2^4} + \frac{0}{2^5} + \dots$$

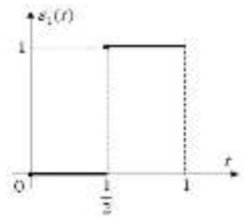
и

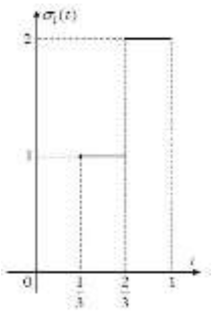
$$\frac{5}{8} = \frac{1}{2} + \frac{0}{2^2} + \frac{0}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^5} + \frac{1}{2^6} + \dots$$

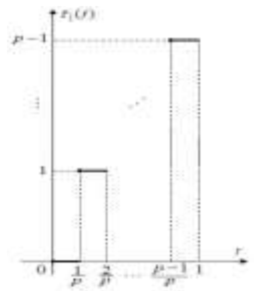
разложений двоично рационального число $\frac{5}{8}$ выбираем первое, в случае $p = 3$ из двух $\frac{5}{9} = \frac{1}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{0}{3^3} + \frac{0}{3^4} + \dots$ и $\frac{5}{9} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{2}{3^3} + \frac{2}{3^4} + \dots$ разложения троично рационального число $\frac{5}{9}$ также выбираем первое и д.т. Таким образом, мы считаем, что такое соглашение сделано со всеми разложениями $p$ - ично $(p = 2,3,\dots)$ рациональных чисел. Этим мы обеспечим единственность разложений $(1) - (3)$.

Разложений $(1) - (3)$ определяют последовательности конечнозначных функций $\varepsilon_k(t), \sigma_k(t), \tau_k(t)$: $\sigma_k(t) = \{0; 1; 2\}$, $\varepsilon_k(t) = \{0;1\}$, $\tau_k(t) = \{0; 1; 2; \dots; p-1\}, k = 1,2,3,\dots$

При $k = 1$ графики функций $\varepsilon_1(t)$, $\sigma_1(t), \tau_1(t)$ соответственно, имеют вид:







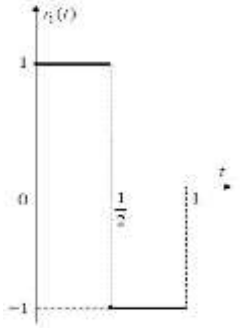
Вместо функций $\varepsilon_k(t), \sigma_k(t), \tau_k(t)$ введем более симметричные, по сравнению с ними, следующие функции, соответственно

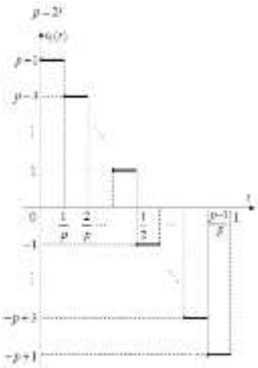
$$r_k(t) = 1 - \varepsilon_k(t), k = 1,2,3,\dots \quad (4)$$

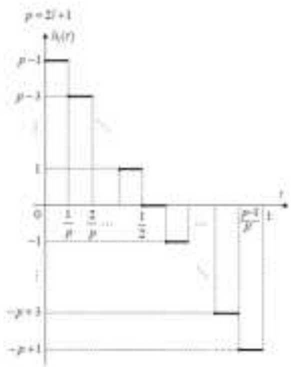
$$g_k(t) = 2(1 - \sigma_k(t)), k = 1,2,3,\dots \quad (5)$$

$$h_k(t) = p - 1 - 2\tau_k(t), k = 1,2,3,\dots \quad (6)$$

графики этих функций при $k = 1$, соответственно, имеют вид:







Функции $r_k(t) = 1 - \varepsilon_k(t), k = 1,2,3,\dots$ введенные впервые Радемахером, называют функциями Радемахера. Функции

$$g_k(t) = 2(1 - \sigma_k(t)), k = 1,2,3,\dots$$

и

$$h_k(t) = p - 1 - 2\tau_k(t), k = 1,2,3,\dots$$

мы также назовем функциями Радемахера. Известно, что система функций Радемахера является не полная ортогональная $h_k(t) = p - 1 - 2\tau_k(t), k = 1,2,3,\dots$ точнее, имеет, место предложение.

**Предложение 1.** Системы функций $g_k(t) = 2(1 - \sigma_k(t))$ и $h_k(t) = p - 1 - 2\tau_k(t), k = 1,2,3,\dots$ образуют неполную ортогональную систему независимых функций.

**Доказательство.** Доказательства предложений проведем для функций $g_k(t) = 2(1 - \sigma_k(t))$. А для функций $h_k(t) = p - 1 - 2\tau_k(t)$ доказательство получается аналогично.

Из свойства функций $g_k(t) = 2(1 - \sigma_k(t))$, $k = 1,2,3,\dots$ легко следует их ортогональность $\int_0^1 g_m(t) g_n(t) dt = \begin{cases} 0, & \text{если } m \neq n \\ \frac{8}{3}, & \text{если } m = n \end{cases}$,

а из того, что $\int_0^1 g_m(t) dt = 0$, при любом $m = 1,2,3,\dots$ следует их независимость:

$$\int_0^1 g_m(t) g_n(t) dt = \int_0^1 g_m(t) dt \int_0^1 g_n(t) dt, \; m \neq n.$$

Неполнота системы очевидна.

Пользуясь теперь свойствами функций Радемахера легко можно доказать следующее предложение.

**Предложение 2.** Число $1 - 2t$ имеет следующие представления:

$$1 - 2t = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{r_k(t)}{2^k} \quad (7)$$

$$1 - 2t = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{g_k(t)}{3^k} \quad (8)$$

$$1-2t=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{h_k(t)}{p^k} \qquad (9)$$

Элементарное интегральное вычисление дает:

$$\int_0^1 e^{ix(1-2t)}dt=\frac{\sin x}{x} \qquad (10)$$

**Предложение 3.** Имеют место следующие представления:

$$\frac{\sin x}{x}=\prod_{n=1}^{\infty}\cos\frac{x}{2^n}$$

$$\frac{\sin x}{x}=\prod_{n=1}^{\infty}\frac{1+2\cos\frac{2x}{3^n}}{3}$$

$$\frac{\sin x}{x}=\prod_{n=1}^{\infty}\frac{2\left(\cos\frac{x}{p^n}+\cos\frac{3x}{p^n}+\ldots+\cos\frac{(p-1)x}{p^n}\right)}{p},\ p=2l$$

$$\frac{\sin x}{x}=\prod_{n=1}^{\infty}\frac{1+2\left(\cos\frac{2x}{p^n}+\cos\frac{4x}{p^n}+\ldots+\cos\frac{(p-1)x}{p^n}\right)}{p},\ p=2l+1$$

**Доказательство.** В силу теоремы сложения, из курса элементарной тригонометрии, получим:

$$\sin x=\sin\left(\frac{x}{2}+\frac{x}{2}\right)=2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}=$$

$$=2^2\sin\frac{x}{2^2}\cos\frac{x}{2^2}\cos\frac{x}{2}=\ldots$$

$$\ldots=2^n\sin\frac{x}{2^n}\cos\frac{x}{2^n}\cos\frac{x}{2^{n-1}}\ldots\cos\frac{x}{2}=$$

$$=2^n\sin\frac{x}{2^n}\prod_{k=1}^{n}\cos\frac{x}{2^k};$$

$$\sin x=\sin\left(\frac{x}{3}+\frac{x}{3}+\frac{x}{3}\right)=\sin\left(\frac{x}{3}+\frac{2x}{3}\right)=$$

$$=3\sin\frac{x}{3}\cdot\frac{1+2\cos\frac{2x}{3}}{3}=$$

$$=3^2\sin\frac{x}{3^2}\cdot\frac{1+2\cos\frac{2x}{3}}{3}\frac{1+2\cos\frac{2x}{3^2}}{3}=\ldots$$

$$\ldots=3^n\sin\frac{x}{3^n}\cdot\prod_{k=1}^{n}\frac{1+2\cos\frac{2x}{3^k}}{3};$$

аналогично,

$$\sin x=$$

$$=p^n\sin\frac{x}{p^n}\cdot\prod_{k=1}^{\infty}\frac{2\left(\cos\frac{x}{p^k}+\cos\frac{3x}{p^k}+\ldots+\cos\frac{(p-1)x}{p^k}\right)}{p},$$

$$p=2l,$$

$$\sin x=$$

$$=p^n\sin\frac{x}{p^n}\cdot\prod_{k=1}^{\infty}\frac{1+2\left(\cos\frac{2x}{p^k}+\cos\frac{4x}{p^k}+\ldots+\cos\frac{(p-1)x}{p^k}\right)}{p},$$

$$p=2l+1$$

Отсюда, поделив обе части на $x$ и переходя к пределу при $n\to\infty$, получим доказательство предложений.

Для любого $k=1,2,3,\ldots$ обозначим через $R_k^{\pm}, G_k^p$ и $H_k^{p,l}$ множества:

$$R_k^{\pm}=\{t\in[0,1]: r_k(t)=\pm1\},$$

$$G_k^p=\{t\in[0,1]: g_k(t)=p\},\quad p=0,\pm2;$$

$$H_k^{p,l}=\{t\in[0,1]: h_k(t)=p-1-2l\},\quad l=0,1,2,3,\ldots,p-1;$$

Очевидно, что мера $\mu$ множеств $R_k^{\pm}, G_k^p$ и $H_k^{p,l}$ равны: $\mu(R_k^{\pm})=\frac{1}{2}$, $\mu(G_k^p)=\frac{1}{3}$, для любого натурального $k$ и любого $p=0,\pm2$; и $\mu(H_k^{p,l})=\frac{1}{p}$, для любого натурального $k$ и любого $l=0,1,2,3,\ldots,p-1$;

Далее, пользуясь свойствами функций $r_k(t)=1-\varepsilon_k(t)$, $g_k(t)=2(1-\sigma_k(t))$ и $h_k(t)=p-1-2\tau_k(t)$, легко получаем следующие равенства:

$$\int_0^1 e^{ix\frac{r_k(t)}{2^k}}dt=\left(\int_{R_k^+}+\int_{R_k^+}\right)e^{ix\frac{r_k(t)}{2^k}}dt=$$

$$=e^{i\frac{x}{2^k}}\frac{1}{2}+e^{-i\frac{x}{2^k}}\frac{1}{2}=\frac{e^{i\frac{x}{2^k}}+e^{-i\frac{x}{2^k}}}{2}=\cos\frac{x}{2^k}$$

$$\int_0^1 e^{ix\frac{g_k(t)}{3^k}}dt=\left(\int_{G_k^{+2}}+\int_{G_k^0}+\int_{G_k^{-2}}\right)e^{ix\frac{g_k(t)}{3^k}}dt=$$

$$=\frac{1}{3}\left(e^{i\frac{2x}{3^k}}+1+e^{-i\frac{2x}{3^k}}\right)=\frac{1+2\cos\frac{2x}{3^k}}{3} \qquad (11)$$

при чётном $p=2l$,

$$\int_0^1 e^{ix\frac{h_k(t)}{p^k}}dt=\left(\sum_{l=0}^{p-1}\int_{H_k^{p,l}}\right)e^{ix\frac{h_k(t)}{p^k}}dt=$$

$$=\frac{2\left(\cos\frac{x}{p^k}+\cos\frac{3x}{p^k}+\ldots+\cos\frac{(p-1)x}{p^k}\right)}{p};$$

а при нечётном $p=2l$,

$$\int_0^1 e^{ix\frac{h_k(t)}{p^k}}dt=\left(\sum_{l=0}^{p-1}\int_{H_k^{p,l}}\right)e^{ix\frac{h_k(t)}{p^k}}dt=$$

$$=\frac{1+2\left(\cos\frac{2x}{p^k}+\cos\frac{4x}{p^k}+\ldots+\cos\frac{(p-1)x}{p^k}\right)}{p}$$

теперь мы в состоянии доказать следующую теорему.

**Теорема**. Имеют место следующие равенства:

$$\int_0^1 \prod_{k=1}^{\infty} e^{ix\frac{r_k(t)}{2^k}} dt = \prod_{k=1}^{\infty} \int_0^1 e^{ix\frac{r_k(t)}{2^k}} dt$$

$$\int_0^1 \prod_{k=1}^{\infty} e^{ix\frac{g_k(t)}{3^k}} dt = \prod_{k=1}^{\infty} \int_0^1 e^{ix\frac{g_k(t)}{3^k}} dt$$

$$\int_0^1 \prod_{k=1}^{\infty} e^{ix\frac{h_k(t)}{p^k}} dt = \prod_{k=1}^{\infty} \int_0^1 e^{ix\frac{h_k(t)}{p^k}} dt$$

**Доказательство**. Доказательства теоремы проведем для функций $g_k(t) = 2(1 - \sigma_k(t))$. А для функций $r_k(t) = 1 - \varepsilon_k(t)$, и $h_k(t) = p - 1 - 2\tau_k(t)$ доказательство теоремы получается аналогично. Легко получить следующие равенства: с одной стороны, в силу (10) и (11), имеем

$$\int_0^1 e^{ix(1-2t)} dt = \frac{\sin x}{x} = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1 + 2\cos\frac{2x}{3^k}}{3} = \prod_{k=1}^{\infty} \int_0^1 e^{ix\frac{r_k(t)}{2^k}} dt\,,$$

с другой стороны,

$$\int_0^1 e^{ix(1-2t)} dt = \int_0^1 e^{ix\sum_{k=1}^{\infty}\frac{g_k(t)}{3^k}} dt = \int_0^1 \prod_{k=1}^{\infty} e^{ix\frac{g_k(t)}{3^k}} dt.$$

Отсюда получаем равенство:

$$\int_0^1 \prod_{k=1}^{\infty} e^{ix\frac{g_k(t)}{3^k}} dt = \prod_{k=1}^{\infty} \int_0^1 e^{ix\frac{g_k(t)}{3^k}} dt$$

Аналогично доказываются остальные равенства.

Полагая в равенствах (6) - (9) $x = \frac{\pi}{2}$, получим различные представления числа $\frac{2}{\pi}$ в виде бесконечных произведений. Здесь особый интерес представляет случай $p = 4$. В этом случае имеем:

$$\frac{2}{\pi} = \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} + \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}\right) \cdot \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}}{2} + \frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2-\sqrt{2}}}}}{2}\right)\cdots$$

## 2. Заключение

В этом исследовании были получены различные формы числа $\frac{2}{\pi}$, выраженные в виде бесконечных произведений, с использованием математических основ функций Радемахера и их применения к формуле Viyet. Эти произведения ранее не были идентифицированы или недостаточно исследованы в предыдущих научных работах. Представленные подходы открывают возможность выявления новых, ранее неизвестных форм бесконечных произведений. Эти разработки могут послужить важной основой для внедрения новых методов в математические исследования и улучшения аналитических и вычислительных подходов. Изучение функций Радемахера может быть применено не только в классической математике, но и в современных научных областях, таких как цифровые вычисления и математическое моделирование. Новые результаты обеспечивают научное сообщество более глубоким пониманием выражения чисел, таких как $\frac{2}{\pi}$, в различных формах произведений и открывают потенциал для создания новых теорий и решений на основе этих выражений. Эти подходы были обсуждены с точки зрения их значения для будущих исследований и того, как их можно использовать. Такие инновации в математике вносят значительный вклад в развитие научной области и могут привести научную мысль и подходы к инновационным направлениям.

## Использованная литература / References


[1] Виете Ф.: Opera mathematica Luqduni Dftfvorum, 1646, p. 123-158c.

[2] А.Н.Колмогоров: Основные понятия теории вероятностей, "Наука М. 1974г.

[3] А.Н.Колмогоров: Математика, её содержание, методы и значение, Т.2, М.1956, 252-284c.

[4] М.Кац: Статистическая независимость в теории вероятностей, анализе и теории чисел, ИИЛ, М. 1963г.


## Информация об авторах/ Information about the authors


| | |
|---|---|
| **Эшкабилов Алишер Абдуллаевич** | доцент кафедры «Высшая математика» Ташкентского государственного транспортного университета. E-MAIL: alisher.eshqobilov@yandex.com https://orcid.org/0000-0002-2233-7662 |
| **Тураев Алимардон Тохирович** | ассистент кафедры «Высшая математика» Ташкентского государственного транспортного университета E-MAIL: alimardontoxirovich0413@gmail.com https://orcid.org/0000-0002-0584-9738 |

# CONTEXT / MUNDARIJA