ENGINEER

international scientific journal

SPECIAL ISSUE

E-ISSN
3030-3893
ISSN
3060-5172

SLIB.UZ
Scientific library of Uzbekistan

A bridge between science and innovation

TOSHKENT DAVLAT TRANSPORT UNIVERSITETI

Tashkent state transport university

ENGINEER

A bridge between science and innovation

E-ISSN: 3030-3893

ISSN: 3060-5172

SPECIAL ISSUE

16-iyun, 2025

engineer.tstu.uz

“QURILISHDA YASHIL IQTISODIYOT, SUV VA ATROF-MUHITNI ASRASH TENDENSIYALARI, EKOLOGIK MUAMMOLAR VA INNOVATSION YECHIMLAR” MAVZUSIDAGI RESPUBLIKA MIQYOSIDAGI ILMIY-AMALIY KONFERENSIYA TASHKILIY QO‘MITASI

1. Abdurahmonov O.K. – O‘zbekiston Respublikasi Prezidenti Administratsiyasi ijtimoiy rivojlantirish departament rahbari, Toshkent davlat transport universiteti rektori
2. Gulamov A.A – Toshkent davlat transport universiteti prorektori
3. Shaumarov S.S – Toshkent davlat transport universiteti prorektori
4. Suvonqulov A.X. – O‘zsuvta’minoti AJ raisi
5. Xamzayev A.X. – O‘zbekiston ekologik partiyasi raisi
6. Maksumov N.E. – O‘zbekiston Respublikasi Vazirlar Mahkamasi huzuridagi Qurilish va uy-joy kommunal xo‘jaligi sohasida nazorat qilish inspeksiyasi boshlig‘i o‘rinbosari
7. Baratov D.X. – Toshkent davlat transport universiteti prorektori
8. Turayev B. X – Toshkent davlat transport universiteti prorektori
9. Norkulov S.T. – Toshkent davlat transport universiteti prorektori
10. Adilxodjayev A.E. – Universitetdagi istiqbolli va strategik vazifalarni amalga oshirish masalalari bo‘yicha rektor maslahatchisi
11. Negmatov S.S. – “Fan va taraqqiyot” DUK ilmiy rahbari, O‘zbekiston Respublikasi Fanlar Akademiyasi Akademigi
12. Abed N.S. – “Fan va taraqqiyot” DUK raisi
13. Merganov A.M – Ilmiy tadqiqotlar, innovatsiyalar va ilmiy-pedagogik kadrlar tayyorlash bo‘limi boshlig‘i
14. Ibadullayev A. – Muhandislik kommunikatsiyalari va tizimlari kafedrasi professori
15. Rizayev A. N. – Muhandislik kommunikatsiyalari va tizimlari kafedrasi professori
16. Xalilova R.X. – Muhandislik kommunikatsiyalari va tizimlari kafedrasi professori
17. Babayev A.R. – “Qurilish muhandisligi” fakulteti dekani
18. Boboxodjayev R.X – Tahririy nashriyot va poligrafiya bo‘limi boshlig‘i
19. Talipov M.M – Ilmiy nashrlar bilan ishlash bo‘limi boshlig‘i
20. Maxamadjonova Sh.I. - Matbuot xizmati kontent-menedjeri
21. Umarov U.V. – Muhandislik kommunikatsiyalari va tizimlari kafedrasi mudiri
22. Eshmamatova D.B. – Oliy matematika kafedrasi mudiri
23. Muxammadiyev N.R. – Bino va sanoat inshootlari qurilishi kafedrasi mudiri
24. Tursunov N.Q. – Materialshunoslik va mashinasozlik kafedrasi mudiri
25. Shermuxammedov U.Z. – Ko‘priklar va tonnellar kafedrasi mudiri
26. Lesov Q.S. – Temir yo‘l muhandisligi kafedrasi mudiri
27. Pirnazarov G‘.F. – Amaliy mexanika kafedrasi mudiri
28. Teshabayeva E.U. – Tabiiy fanlar kafedrasi professori
29. Chorshanbiyev Umar Ravshan o‘g‘li – Muhandislik kommunikatsiyalari va tizimlari kafedrasi dotsent v.b.
30. Obidjonov Axror Jo‘raboy o‘g‘li – Muhandislik kommunikatsiyalari va tizimlari kafedrasi assistenti

Models of random processes with particle interaction

Zh. Azimov[1], A. Turaev[1]
[1]Tashkent State University of Transport, Tashkent, Uzbekistan

Abstract: Many scientific and practical studies conducted on a global scale, in most cases, are reduced to the problems of studying branching random processes. The theory of branching random processes with particle interaction studies the laws of evolution of a population of particles, in which the reproduction of new particles occurs through the interaction of several particles already existing in the population. Branching processes with particle interaction are of great importance in scientific fields such as demography, medicine, chemistry, biology, as well as genetic coding and population management. In the paper, we investigate the asymptotic behavior of branching random processes with interaction of particles. A direct equation is obtained for the generating function of the process . Also, a limit theorem for the moment of the -th order of branching random process with interaction of particles is obtained.

Keywords: Model, random process, Markov branching process, generating function, critical process, probability of degeneration, formula of complete probability, Leibniz formula, Kolmogorov equation.

Модели случайных процессов с взаимодействием частиц

Азимов Ж.[1], Тураев А.[1]
[1]Ташкентский государственный транспортный университет, Ташкент, Узбекистан

Аннотация. Многие научно-практические исследования, проводимые в мировом масштабе, в большинстве случаев сводятся к задачам изучения ветвящихся случайных процессов. Теория ветвящихся случайных процессов с взаимодействием частиц исследует законы эволюции популяции частиц, в котором, размножения новых частиц происходит взаимодействии нескольких уже существующих в популяции частиц. Ветвящиеся процессы с взаимодействием частиц имеют важное значение в научных областях, таких как демография, медицина, химия, биология, а также генетического кодирования и управления популяцией. В статье проведено исследование асимптотического поведения ветвящихся случайных процессов с взаимодействием частиц. Получено прямое уравнение Колмогорова для производящей функцией процесса . Также получена предельная теорема для момента -го порядка ветвящегося случайного процесса с взаимодействием частиц

Ключевые слова: Модель, случайный процесс, Марковский ветвящиеся процесс, ветвящегося процесса, производящая функция, критический процесс, вероятность вырождения, формула полной вероятности, формула Лейбница, уравнение Колмогорова.

1. Введение

Рассматривается модель ветвящихся случайных процессов с непрерывным временем и с взаимодействием частиц. Как известно, в обычных ветвящихся случайных процессах (в.с.п.) Предполагается, что частицы размножаются независимо друг от друга. Однако, во многих реальных процессах рождение новых частиц происходит при взаимодействии нескольких уже существующих частиц. В этом случае используемый обычно аппарат производящих функций может применяться ограниченно и не дает значительных результатов. Ветвящиеся процессы с взаимодействием частиц в общей постановке были введены б.а.севастьяновым в [1] и изучались в работах [2]-[5]. В работе а.в.калинкина [4] дается общий обзор марковских ветвящихся процессов с взаимодействием, а в работе и.с.бадалбаева, а.в.дряхлова [5] рассматриваются процессы с парными взаимодействиями частиц и установлено экспоненциальное убывание вероятности продолжения процесса.

Предмет исследования и постановка задачи

Рассмотрим ветвящийся процесс $\{\mu(t), t \geq 0\}$ с одним типом частиц и взаимодействием k частиц. Пусть $\mu(t)$ – число частиц в момент времени t ветвящегося процесса с взаимодействием, в котором размножение частиц происходит следующем образом. В момент времени t любые k частиц могут превратиться в $j \neq k$ частиц, и переходные вероятности процесса

$$P_{ij}(t) = P\{Z(t) = j|Z(0) = i\}$$

определяются формулами (при $t \to 0$, $k \geq 2$ – целое)

$$P_{ij}(t) = \delta_{ij} + ip_{j-i+k}t + o(t),$$
$$i \geq k, j \geq i - k$$
$$P_{ij}(t) = \delta_{ij}, 0 \leq i \leq k - 1,$$
$$P_{ij}(t) = o(t), j < i - k,$$

где

$$p_j \geq 0, j = 0,1,\dots, k-1, k+1,\dots,$$

$$p_k < 0,$$
$$\sum_{j=0}^{\infty} p_j = 0,$$

δ_{ij} – символ Кронекера.

Процесс $\{\mu(t), t \geq 0\}$ имеет k поглощающих состояний $\{0, 1, \ldots, k\text{-}1\}$. Подобная модель рассматривалась в работах [6] и [7], где были найдены вероятности вырождения процесса. В работе [8] рассмотрена модель процесса с взаимодействием и миграцией частиц.

2. Результаты и их обсуждения

Основными результатами настоящей работы являются предельная теорема для числовых характеристик и установление функционального соотношение для производящейся функции ветвящихся процессов с взаимодействием частиц. При этом не ограничивая общности, можно предполагать, что процесс начинается с k частиц.

Введем производящие функции (п.ф.)

$$f(s) = \sum_{j=0}^{\infty} p_j s^j, F(t,s) = \sum_{j=0}^{\infty} P(\mu(t) = j)s^j,$$

Теорема 1. Производящая функция $F(t,s)$ удовлетворяет при $|s|\leq 1$ линейному дифференциальному уравнению в частных производных

$$\frac{\partial F(t,s)}{\partial t} = \frac{f(s)}{s^{k-1}}\left(\frac{\partial F(t,s)}{\partial s} - \sum_{i=1}^{k} iP(\mu(t) = i)s^{i-1}\right) \quad (1)$$

с начальным условием $F(0,s)=s^k$.

Теперь будем предполагать, что выполняются условия

$$f'(1) = 0, 0 < f''(1) = 2b < \infty, \quad (2)$$

условие, как и в обычном случае, определяющее критический процесс.

Обозначим

$$\bar{q} = \sum_{i=1}^{k-1} iq_i,$$

где q_i-вероятности вырождения процесса $(i = 0,1,2,\ldots,k-1)$.

Теорема 2. Пуст момент $m_n(t) = E\mu_t^n$ существует для некоторого $n \geq 1$. Если выполняется условие (2), то при $t \to \infty$

$$m_1(t) \to k,$$

$$m_n(t) \sim (k - \bar{q})n!\,(bt)^{n-1}, n \geq 2.$$

Доказательство основных результатов. Доказательство теоремы 1. По формуле полной вероятности,

$$F(t,s) = \sum_{i=0}^{\infty} P(\mu_{t-\tau} = i)\sum_{j=0}^{\infty} s^j P\left(\frac{\mu_t = j}{\mu_{t-\tau} = i}\right) = \quad = \sum_{i=0}^{k-1} P(\mu_{t-\tau} = i)s^i +$$

$$+\sum_{i=k}^{\infty} P(\mu_{t-\tau} = i)\sum_{j=i-k}^{\infty} s^j(\delta_{ij} + ip_{j-i+k}\tau + o(\tau)) =$$

$$= \sum_{i=0}^{\infty} P(\mu_{t-\tau} = i)s^i +$$

$$+\sum_{i=k}^{\infty} P(\mu_{t-\tau} = i)\sum_{j=i-k}^{\infty} is^{j-i+k}p_{j-i+k}\tau + o(\tau) =$$

$$= F(t-\tau,s) + \frac{\tau}{s^{k-1}}\sum_{i=k}^{\infty} iP(\mu_{t-\tau} = i)s^{i-1}f(s) + o(\tau),$$

при $\tau \to 0$ получаем утверждение теоремы.

Доказательство теоремы 2. Продифференцируем обе стороны уравнения (1) по $\frac{\partial^n}{\partial s^n}$ и воспользуемся формулой Лейбница:

$$\frac{\partial \sum_{i=0}^{n} C_n^i (s^{k-1})^{(i)} F^{(n-i)}(t,s)}{\partial t} =$$
$$= \sum_{i-2}^{n} C_n^i f_s^{(i)}\left[\frac{\partial^{(n-i+1)}F}{\partial s^{n-i+1}} - \sum_{j=1}^{k-1} jP(\mu_t = i)s^{max(j-i,0)}\right].$$

Последовательно получаем при $s = 1$

$$\frac{\partial}{\partial t}(m_1(t) + k - 1) = 0$$

откуда

$$m_1(t) = const = m_1(0) = k.$$

Далее, аналогично

$$\frac{\partial}{\partial t}(m_2(t) + 2(k-1)m_1(t)) =$$
$$= 2b\left(m_1(t) - \sum_{i=1}^{k-1} iP(\mu_t = i)\right)$$

откуда при $t \to \infty$

$$m_2(t) \sim 2b(k - \bar{q})t.$$

Далее, по индукции, если доказано, что

$$m_{n-1}(t) \sim (k - \bar{q})(n-1)!\,(bt)^{n-2},$$

то

$$\frac{\partial(m_n(t) + n(k-1)m_{n-1}(t))}{\partial t} \sim C_n^2 f''(1)m_{n-1}(t)$$

откуда

$$m_n(t) \sim 2b\frac{n(n-1)}{2}(k - \bar{q})(n-1)!\,b^{n-2}\int_0^t \tau^{n-2}d\tau \sim$$
$$\sim (k - \bar{q})n!\,(bt)^{n-1}.$$

3. Заключение

Проведено исследование асимптотического поведения ветвящихся случайных процессов с взаимодействием частиц. Получено прямое уравнение Колмогорова для производящей функцией процесса $\{\mu(t), t \geq 0\}$. Также получена предельная теорема для момента n -го порядка ветвящегося случайного процесса с взаимодействием частиц.

Использованная литература / References

[1] Севастьянов Б.А. Ветвящиеся процессы с взаимодействием частиц. – В сб.: Третья Международная Вильнюсская конференция по теории вероятностей и матем. статистике. Тезисы докладов. Т.1. Вильнюс: Ин-т матем. и кибернет. АН ЛитССР. 1981, с.139-140.

[2] Севастьянов Б.А., Калинкин А.В. Ветвящиеся случайные процессы с взаимодействием частиц. – Докл. АН СССР, 1982, т.264, № 2, с.306-308.

[3] Калинкин А.В. Вероятность вырождения ветвящегося процесса с взаимодействием частиц. – Теор. вер. и ее примен., 1982, т. XXVII, в.1, с.192-197.

[4] Калинкин А.В. Марковские ветвящиеся процессы с взаимодействием. УМН, 2002, т.57, в.2, с.23-84.

[5] Бадалбаев И.С., Дряхлов А.В. Об асимптотическом поведении вероятности продолжения ветвящегося процесса с парными взаимодействиями частиц. Теор. вер. и ее примен., 1996, т.41, в.4, с.721-737.

[6] Ежов И.И. Ветвящиеся процессы с групповой гибелью. Теор. вер. и ее примен. 1980, т.25, в.1. с.206.

[7] Решетняк В.Н. Об одном классе ветвящихся процессов с взаимодействием частиц. «Аналитические методы в теории надежности», Киев, 1985, с.106-114.

[8] Азимов Ж.Б. Асимптотическое поведение ветвящихся случайных процессов с взаимодействием и миграцией частиц. ДАН РУз., 2022, №3, с. 3-5.

Информация об авторе/ Information about the author

Жахонгир Бахрамович Азимов	доцент кафедры «Высшая математика» Ташкентского государственного транспортного университета. Кандидат физико-математических наук. E-mail: azimovjb@gmail.com https://orcid.org/0000-0002-0859-3184
Тураев Алимардон Тохирович	ассистент кафедры «Высшая математика» Ташкентского государственного транспортного университета E-mail: alimardontoxirovich0413@gmail.com https://orcid.org/0009-0002-0584-9738

CONTEXT / MUNDARIJA