ENGINEER

international scientific journal

SPECIAL ISSUE
E-ISSN
3030-3893
ISSN
3060-5172

SLIB.UZ
Scientific library of Uzbekistan

A bridge between science and innovation

TOSHKENT DAVLAT TRANSPORT UNIVERSITETI
Tashkent state transport university

ENGINEER

A bridge between science and innovation

E-ISSN: 3030-3893
ISSN: 3060-5172
SPECIAL ISSUE
16-iyun, 2025

engineer.tstu.uz

"QURILISHDA YASHIL IQTISODIYOT, SUV VA ATROF-MUHITNI ASRASH TENDENSIYALARI, EKOLOGIK MUAMMOLAR VA INNOVATSION YECHIMLAR" MAVZUSIDAGI RESPUBLIKA MIQYOSIDAGI ILMIY-AMALIY KONFERENSIYA TASHKILIY QO'MITASI

1. Abdurahmonov O.K. – O'zbekiston Respublikasi Prezidenti Administratsiyasi ijtimoiy rivojlantirish departament rahbari, Toshkent davlat transport universiteti rektori
2. Gulamov A.A – Toshkent davlat transport universiteti prorektori
3. Shaumarov S.S – Toshkent davlat transport universiteti prorektori
4. Suvonqulov A.X. – O'zsuvta'minoti AJ raisi
5. Xamzayev A.X. – O'zbekiston ekologik partiyasi raisi
6. Maksumov N.E. – O'zbekiston Respublikasi Vazirlar Mahkamasi huzuridagi Qurilish va uy-joy kommunal xo'jaligi sohasida nazorat qilish inspeksiyasi boshlig'i o'rinbosari
7. Baratov D.X. – Toshkent davlat transport universiteti prorektori
8. Turayev B. X – Toshkent davlat transport universiteti prorektori
9. Norkulov S.T. – Toshkent davlat transport universiteti prorektori
10. Adilxodjayev A.E. – Universitetdagi istiqbolli va strategik vazifalarni amalga oshirish masalalari bo'yicha rektor maslahatchisi
11. Negmatov S.S. – "Fan va taraqqiyot" DUK ilmiy rahbari, O'zbekiston Respublikasi Fanlar Akademiyasi Akademigi
12. Abed N.S. – "Fan va taraqqiyot" DUK raisi
13. Merganov A.M – Ilmiy tadqiqotlar, innovatsiyalar va ilmiy-pedagogik kadrlar tayyorlash bo'limi boshlig'i
14. Ibadullayev A. – Muhandislik kommunikatsiyalari va tizimlari kafedrasi professori
15. Rizayev A. N. – Muhandislik kommunikatsiyalari va tizimlari kafedrasi professori
16. Xalilova R.X. – Muhandislik kommunikatsiyalari va tizimlari kafedrasi professori
17. Babayev A.R. – "Qurilish muhandisligi" fakulteti dekani
18. Boboxodjayev R.X – Tahririy nashriyot va poligrafiya bo'limi boshlig'i
19. Talipov M.M – Ilmiy nashrlar bilan ishlash bo'limi boshlig'i
20. Maxamadjonova Sh.I. - Matbuot xizmati kontent-menedjeri
21. Umarov U.V. – Muhandislik kommunikatsiyalari va tizimlari kafedrasi mudiri
22. Eshmamatova D.B. – Oliy matematika kafedrasi mudiri
23. Muxammadiyev N.R. – Bino va sanoat inshootlari qurilishi kafedrasi mudiri
24. Tursunov N.Q. – Materialshunoslik va mashinasozlik kafedrasi mudiri
25. Shermuxammedov U.Z. – Ko'priklar va tonnellar kafedrasi mudiri
26. Lesov Q.S. – Temir yo'l muhandisligi kafedrasi mudiri
27. Pirnazarov G'.F. – Amaliy mexanika kafedrasi mudiri
28. Teshabayeva E.U. – Tabiiy fanlar kafedrasi professori
29. Chorshanbiyev Umar Ravshan o'g'li – Muhandislik kommunikatsiyalari va tizimlari kafedrasi dotsent v.b.
30. Obidjonov Axror Jo'raboy o'g'li – Muhandislik kommunikatsiyalari va tizimlari kafedrasi assistenti

Coefficients of the weighting optimal quadrature formula in the Sobolev space

F.I. Davlatova[1], S.T. Tuychieva[1]
[1]Tashkent State University of Transport, Tashkent, Uzbekistan

Abstract: In this paper, an optimal quadrature with weight in the Sobolev space is constructed for . The optimal coefficients of the constructed weight quadrature formula were found in the form of an analytical formula using the Sobolev method.

Keywords: optimal quadrature formula, extremal function, optimal coefficients, the error of the quadrature formula, the error functional, oscillating function.

Коэффициенты весовой оптимальной квадратурной формулы в пространстве соболева

Давлатова Ф.[1], Туйчиева С.[1]
[1]Ташкентский государственный транспортный университет, Ташкент, Узбекистан

Аннотация: В данной работе строится оптимальная квадратура с весом в пространстве Соболева при . Оптимальные коэффициенты построенной весовой квадратурной формулы были найдены в виде аналитической формулы с использованием метода Соболева.

Ключевые слова: оптимальная квадратурная формула, экстремальная функция, оптимальные коэффициенты, погрешность квадратурной формулы, функционал погрешности, осциллирующая функция.

1. Введение

В настоящее время во всем мире приобретает все большее значение построение оптимальных квадратурных формул при приближенном вычислении сильно осциллирующих интегралов.

Одной из важнейших задач вычислительной математики является построение оптимальных квадратурных формул дифференцируемых функций в различных пространствах для приближенного вычисления сильно осциллирующих интегралов.

Построение оптимальных (в определенном смысле) методов приближенного вычисления интегралов сильно осциллирующих функций — интересная и важная область компьютерной технологии и математики, поскольку много важных задач, решаемых на практике (например, цифровая обработка сигналов, обработка изображений, радиолокация, медицинская электроника, компьютерная томография и т. д.) требуют вычисления таких интегралов. В нашей работе мы также рассматриваем построение оптимальных квадратурных формул для приближенного вычисления сильно осциллирующих интегралов.

2. Методы

Предположим, что производная первого порядка функций $\varphi(x)$ абсолютно непрерывна, интегрируется по квадрату производной второго порядка и является комплекснозначными функциями с действительными аргументами.

Этот набор функций образует гильбертово пространство $L_2^{(2)}(0,1)$. Скалярное произведение двух функций φ и ψв этом пространстве определяется равенством

$$\langle\varphi,\psi\rangle=\int_0^1\varphi''(x)\,\overline{\psi}''(x)dx, \qquad (1)$$

где $\overline{\psi}$ является сопряженной функцией к функции - ψ и φ норма функции соответственно определяется формулой

$$\left\|\varphi|L_2^{(2)}(0,1)\right\|^2=\langle\varphi,\varphi\rangle=\int_0^1\varphi''(x)\overline{\varphi}''(x)\,dx. \qquad (2)$$

В этом пространстве рассмотрим квадратурную формулу с производными следующего вида

$$\int_0^1 e^{2\pi i\omega x}\,\varphi(x)dx\cong$$

$$\cong\sum_{\beta=0}^N d_0[\beta]\,\varphi(h\beta)+\sum_{\beta=0}^N d_1[\beta]\,\varphi'(h\beta), \qquad (3)$$

где, $e^{2\pi i\omega x}$- весовая функция, $[\beta]=(h\beta)$, $h=1/N$, N - натуральное число, $i^2=-1$, $\omega h\in\mathbb{Z},\omega\neq 0$, $d_0[\beta]$, $d_1[\beta]-(3)$ коэффи-циенты квадратурной формулы, т.е. $d_0[\beta]$ коэффициенты в пространстве $L_2^{(1)}(0,1)$ точные для произвольного постоянного числа $\omega h\in\mathbb{Z},\omega\neq 0$ вида

$$\int_0^1 e^{2\pi i\omega x}\,f(x)dx\cong\sum_{\beta=0}^N d_0[\beta]\,\varphi(h\beta)$$

оптимальные коэффициенты квадратурной формулы, то есть

$$d_0[0] = -\frac{1}{2\pi i\omega},$$

$$d_0[\beta] = 0, \beta = \overline{1, N-1}, \qquad (4)$$

$$d_0[N] = \frac{1}{2\pi i\omega}.$$

А коэффициенты $d_1[\beta]$ из (3) неизвестные коэффициенты квадратурной формулы.

Разница между суммами интеграла и квадратуры

$$(\ell, \varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} \ell(x)\varphi(x)dx = \int_0^1 e^{2\pi\omega i x}\varphi(x)dx -$$

$$-\sum_{\beta=0}^{N} d_0[\beta]\,\varphi(h\beta) - \sum_{\beta=0}^{N} d_1[\beta]\,\varphi'(h\beta) \quad (5)$$

называется погрешностью квадратурной формулы (3). Этой погрешности соответствует следующий функционал погрешности:

$$\ell(x) = e^{2\pi i\omega x}\varepsilon_{[0,1]}(x) - -\sum_{\beta=0}^{N} d_0[\beta]\,\delta(x-h\beta) + \sum_{\beta=0}^{N} d_1[\beta]\,\delta'(x-h\beta), \qquad (6)$$

где $\varepsilon_{[0,1]}(x)$ – характеристическая функция отрезка $[0,1]$, $\delta(x)$ – дельта-функция Дирака.

Функционал погрешности ℓ квадратурной формулы (3) является линейным функционалом, принадлежащим совместному пространству $L_2^{(2)*}(0,1)$. Так как, функционал погрешности ℓ определен в пространстве $L_2^{(2)}(0,1)$, должны быть выполнены следующие условия

$$(\ell, x^\alpha) = 0, \alpha = 0{,}1.$$

Нам известно, что на основе неравенства Коши-Шварца (3) абсолютное значение погрешности квадратурной формулы φ оценивается сверху с помощью произведения норм функции и функционала погрешности ℓ

$$|(\ell, \varphi)| \le \left\|\ell|L_2^{(2)*}(0,1)\right\| \cdot \left\|\varphi|L_2^{(2)}(0,1)\right\|.$$

Из неравенства Коши-Шварца видно, что абсолютное значение погрешности квадратурной формулы (3) для элемента φ принадлежащего пространству $L_2^{(2)}(0,1)$ оценивается нормой функционала погрешности ℓ в совместном пространстве $L_2^{(2)}(0,1)$.

Норма функционала погрешности ℓ зависит от коэффициентов $d_0[\beta]$, $d_1[\beta]$.

Задача нахождения минимума коэффициентов при фиксированных узлах нормы функционала погрешности ℓ называется ***задачей Сарда***, а полученная формула — ***оптимальной квадратурной формулой в смысле Сарда.***

Основной целью данной работы является решение задачи Сарда для квадратурных формул вида (3) в пространстве $L_2^{(2)}(0,1)$ методом С.Л. Соболева, т.е. нахождение коэффициентов $d_1[\beta]$ (если таковые имеются) при

$$\left\|\mathring{\ell}|L_2^{(2)*}(0,1)\right\| := \inf_{d_1[\beta]} \left\|\ell|L_2^{(2)*}(0,1)\right\|$$

для заданных коэффициентов $d_0[\beta]$.

Поэтому для построения оптимальных квадратурных формул вида (3) в смысле Сарда в пространстве $L_2^{(2)}(0,1)$ необходимо решить следующие задачи.

Задача 1. Найти вид нормы функционала погрешности ℓ квадратурной формулы вида (3) в пространстве $L_2^{(2)*}(0,1)$.

Задача 2. Найти коэффициенты $d_1[\beta]$, дающие минимальное значение найденной норме.

Найденные коэффициенты $d_1[\beta]$ назы-ваются ***оптимальными коэффициентами*** квадратурной формулы (3) и обозначаются как $\mathring{d}_1[\beta]$, соответствующий коэффициенту $\mathring{d}_1[\beta]$ функционал погрешности $\mathring{\ell}$ называется ***функционалом погрешности соответст-вующий оптимальной квадратурной формуле***, а квадратурная формула называется ***оптимальной квадратурной формулой.***

3. Результаты и обсуждение

Этими задачами в различных пространствах занимались в работах [4-6].

Следует отметить, что впервые в работе [3] была построена квадратурная формула для приближенного вычисления быстро-осцилирующих интегралов.

Основная цель нашей работы заключается в получении результатов вида (3) в смысле Сарда для коэффициентов оптимальной квадратурной формулы.

Теорема. *При $\omega h \in \mathbb{Z}$ и $\omega \neq 0$ коэффициенты оптимальной квадратурной формулы вида (3) в смысле Сарда пространства $L_2^{(2)}(0,1)$ имеют следующий вид:*

$$d_0[0] = -\frac{1}{2\pi i\omega},$$

$$d_0[\beta] = 0, \beta = \overline{1, N-1},$$

$$d_0[N] = \frac{1}{2\pi i\omega},$$

$$d_1[0] = -\frac{1}{(2\pi\omega)^2},$$

$$d_1[\beta] = 0, \beta = \overline{1, N-1},$$

$$d_1[N] = \frac{1}{(2\pi\omega)^2}.$$

4. Заключение

В данной работе для приближенного вычисления интегралов от сильно осциллирующих функций построена оптимальная квадратурная формула с производными в пространстве комплекснозначных функций интегрируемая с квадратом производной второго порядка.

То есть, с помощью экстремальной функции найден квадрат нормы функционала погрешности рассматриваемой квадратурной формулы. Минимизируя нормы этого функционала погрешности по коэффициентам была построена функция Лагранжа и получена система типа Винера-Хопфа. Путем решения этой системы с помощью дискретного аналога дифференциального оператора было найдено аналитическое представление оптимальных коэффициентов.

Использованная литература / References

[1] Соболев С.Л. Введение в теорию кубатурных формул. – М.: Наука, 1974.-808 с

[2] Соболев С.Л., Васкевич В.Л. Кубатурные формулы. - Новосибирск: Изд-во ИМ СО РАН, 1996. - 484 с.

[3] Filon L.N.G. On a quadrature formula for trigonometric integrals. Proc. Roy. Soc. Edinburgh, 1928, vol. 49, pp. 38-47.

[4] Hayotov A.R., Jeon S., Lee C.-O., Shadimetov Kh.M. Optimal quadrature formulas for non-periodic functions in Sobolev space and its application to CT image reconstruction. Filomat, 2021, vol.35, no.12, pp. 4177-4195. https://doi.org/10.2298/FIL2112177H

[5] Shadimetov Kh., Davlatova F. On an optimal formula for approximate integration. AIP Conf. Proc., 2024, 3004, 060023 https://doi.org/10.1063/5.0199935

[6] Shadimetov Kh.M., Davlatova F. I. Mamatova N.H., Optimal Quadrature Formulas with Derivative for Calculating Integrals of Strongly Oscillating Functions. ISSN 1995-0802, Lobachevskii Journal of Mathematics, 2024, Vol. 45, No. 10, pp. 5254–5263. DOI: 10.1134/S1995080224602698

Информация об авторах/ Information about the author

Туйчиева Сайёра	доцент (д.ф.ф.-м.н), Ташкентский государственный транспортный университет E-mail: sayyora-tohirzoda@mail.ru https://orcid.org/0000-0003-2630-526X
Давлатова Фатима Исраиловна	Ассистент, Ташкентский государственный транспортный университет E-mail: fotimadavlatova733@gmail.com https://orcid.org/0009-0000-6336-5443

CONTEXT / MUNDARJA